

# DECIDIBILIDAD DE PROBLEMAS SOBRE REDES DE PETRI TEMPORIZADAS



TESIS DOCTORAL  
PRESENTADA AL DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA Y AUTOMÁTICA  
DE LA UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID PARA LA OBTENCIÓN DEL  
TÍTULO DE  
DOCTOR EN MATEMÁTICAS

Valentín Valero Ruiz  
Febrero, 1993

Trabajo dirigido por Dr. David de Frutos Escrig.

*"... tiempo, tiempo oscuro, tiempo secreto,  
en eterno fluir, como un río..."*

THOMAS WOLFE

The Web and the Rock

# Agradecimientos

El presente trabajo es fruto de muchas horas de dedicación. Son muchas las personas que han aportado su “granito de arena” para que esta tesis sea una realidad, a las que quiero expresar mi agradecimiento.

Empezaré por expresar mi agradecimiento al Dr. David de Frutos por su inestimable ayuda en la dirección de la tesis, así como por el tiempo dedicado a su revisión y corrección, fruto del cual han sido sus numerosas y siempre bien acogidas sugerencias, que han hecho del mismo gran parte de lo que es en estos momentos.

También quisiera citar a mis compañeros del Departamento de Informática en la Universidad de Castilla-La Mancha, que han dedicado parte de su tiempo a ayudarme a resolver los problemas surgidos durante la redacción del texto. En especial quisiera citar a Fernando Cuartero, compañero de trabajo y amigo, que ha compartido muchos kilómetros de carretera y problemas; sus sugerencias han sido siempre bien recibidas en los diferentes debates y discusiones que hemos mantenido.

Un agradecimiento cordial al profesorado del Departamento de Informática y Automática de la Universidad Complutense, que tanto a mí como a otros compañeros de la Universidad de Castilla-La Mancha nos han acogido extraordinariamente.

Finalmente, quisiera agradecer a mi familia y amigos, su paciencia y ánimo en los momentos difíciles.





# Contenidos

<b>Agradecimientos</b>	<b>i</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Modelado de Sistemas Concurrentes . . . . .	1
1.2 Importancia del tiempo en las especificaciones . . . . .	2
1.3 Resumen del Trabajo . . . . .	4
<b>2 Generalidades</b>	<b>15</b>
2.1 Notación . . . . .	15
2.2 Redes de Petri . . . . .	16
2.3 Análisis de Redes . . . . .	22
2.3.1 Propiedades de Seguridad . . . . .	23
2.3.2 Propiedades de Actividad . . . . .	24
2.3.3 Decidibilidad del Alcance y la Vivacidad . . . . .	25
2.3.4 Técnicas de Análisis de Propiedades . . . . .	26
<b>3 Redes de Petri Temporizadas</b>	<b>35</b>
3.1 Conceptos Generales . . . . .	35
3.2 Análisis de Problemas para RPT . . . . .	43
3.2.1 Problema de Alcance . . . . .	43
3.2.2 Otros problemas relacionados . . . . .	45
<b>4 Simulación de RPT's con Redes sin Tiempos</b>	<b>47</b>
4.1 Codificación de los Autómatas de Estados Finitos . . . . .	48
4.2 Caso 1: Semántica de Secuencias ss-finitas . . . . .	49
4.3 Caso 2: Semántica de Secuencias sds-finitas . . . . .	56

4.4	Construcción general . . . . .	58
4.4.1	Simulación de la Semántica de Pasos de las Redes de Petri No Temporizadas . . . . .	58
4.4.2	Simulación de las Redes de Petri Temporizadas con su semántica sin restricciones . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Máximo Paralelismo</b>	<b>73</b>
5.1	Conceptos Generales . . . . .	74
5.2	Análisis de Propiedades bajo Máximo Paralelismo . . . . .	78
5.3	Máximo Paralelismo en Redes No Restrictivas . . . . .	106
<b>6</b>	<b>Time-outs</b>	<b>119</b>
6.1	Modelos de time-outs sin transiciones especiales . . . . .	120
6.1.1	Modelo dinámico, basado en las precondiciones . . . . .	120
6.1.2	Modelo dinámico, basado en las postcondiciones . . . . .	125
6.1.3	Modelo estático, basado en las precondiciones . . . . .	130
6.1.4	Modelo Estático basado en las postcondiciones . . . . .	132
6.2	Modelos de time-outs con transiciones especiales . . . . .	133
<b>7</b>	<b>Modelos de tiempo continuo</b>	<b>137</b>
7.1	Sistema Racional de Tiempos . . . . .	137
7.2	Sistema Real de Tiempos . . . . .	151
7.3	Análisis de Problemas . . . . .	153
<b>8</b>	<b>Bisimulación</b>	<b>167</b>
8.1	Procesos de Redes de Petri . . . . .	168
8.1.1	Procesos de Redes de Petri con la Semántica de Interleaving . . . . .	170
8.1.2	Procesos de Redes de Petri con la Semántica de Pasos . . . . .	178
8.2	eap-procesos . . . . .	181
8.3	Bisimulación P.H. para Redes 1-Seguras . . . . .	186
8.3.1	Bisimulación P.H. bajo la Semántica de Pasos . . . . .	192
8.4	Bisimulación P.H. Para Redes n-Seguras . . . . .	194
<b>9</b>	<b>Bisimulación P.H. en Redes Temporizadas</b>	<b>209</b>
9.1	Procesos Temporizados . . . . .	209

9.2	Bisimulación sobre Redes Temporizadas . . . . .	231
<b>10</b>	<b>Trabajos Relacionados</b>	<b>255</b>
10.1	Redes TER . . . . .	255
10.2	LOTOS Temporizado y Redes con Tiempos . . . . .	256
10.3	Codificación de RPT de Andre . . . . .	258
10.4	Redes SENS . . . . .	259



# Lista de Figuras

1	Ejemplo de Red de Petri . . . . .	17
2	Ejemplo de Red de Petri Marcada . . . . .	18
3	Dos Redes de Petri con la misma Matriz de Incidencia . . . . .	22
4	Ejemplo de Red de Petri Temporizada . . . . .	38
5	Ejemplo de Red de Petri Temporizada . . . . .	40
6	Construcción de $N(\mathcal{A})$ . . . . .	49
7	Red utilizada para decidir la $s, k$ -ilimitación lineal . . . . .	56
8	Construcción para la Semántica sin Restricciones . . . . .	61
9	Red asociada a una RPT: simulación de una transición . . . . .	69
10	Red de Petri bajo máximo paralelismo . . . . .	73
11	Conexión del lugar $sec$ a todas las transiciones de la red de partida . . . . .	83
12	Codificación de una red con arcos inhibidores . . . . .	84
13	Red $N_{j,k}$ para $n_{j,k} = 3$ . . . . .	88
14	Red $N_j$ . . . . .	90
15	Red $TEST$ . . . . .	91
16	Red $\tilde{N}$ . . . . .	92
17	Red $N'$ . . . . .	93
18	Reemplazamiento de cada transición $t$ de la red de partida por $\delta(t)$ transiciones . . . . .	95
19	Codificación de la instrucción $e_i : r_j := r_j + 1$ ; ir a $e_k$ . . . . .	96
20	Codificación de la instrucción $e_i : \text{si } r_j = 0 \text{ ir a } e_k \text{ sino } r_j := r_j - 1;$ ir a $e_n$ . . . . .	96
21	Red $N'$ . . . . .	99
22	Lugar asociado a cada transición . . . . .	100
23	Red $N'$ . . . . .	101

24	Red $N'$ . . . . .	104
25	Red $N'$ . . . . .	105
26	Representación parcial de la red $N_1$ . . . . .	109
27	Representación parcial de la Red $N_2$ . . . . .	110
28	Ejemplo de <i>Time-Out</i> . . . . .	120
29	Red con dos transiciones en conflicto, con un <i>time-out</i> igual a 1 ambas transiciones . . . . .	125
30	Modelado de Redes con Arcos Inhibidores con el Modelo 3 de <i>Time-</i> <i>Outs</i> . . . . .	127
31	Ejemplo 1 del modelo Estático basado en postcondiciones . . . . .	133
32	Ejemplo 2 del modelo Estático basado en postcondiciones . . . . .	133
33	Marcajes de $N$ y de $\tilde{N}$ . . . . .	144
34	Red $N$ . . . . .	150
35	Red $\tilde{N}$ asociada a $N$ . . . . .	150
36	Red de Petri con Duraciones Reales . . . . .	151
37	Conexión del lugar <i>excede</i> con las nuevas transiciones . . . . .	166
38	Red de Petri $N$ . . . . .	171
39	Un proceso de la red $N$ . . . . .	171
40	Diagrama conmutativo . . . . .	185
41	Dos Redes de Petri identificadas por la bisimulación basada en in- terleaving. . . . .	186
42	Red de Petri Temporizada $N$ . . . . .	212
43	Un Proceso Temporizado de $N$ . . . . .	212
44	Dos SET bisimilares . . . . .	232

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Modelado de Sistemas Concurrentes

Quedan ya lejanos los tiempos en los que la programación de los computadores se hacía manualmente y con elevados tiempos de ejecución para pequeñas rutinas de cálculo. Hoy nos encontramos incluso con máquinas dotadas de miles de procesadores capaces de realizar en unos segundos cálculos mucho más complejos, como inversión de grandes matrices, procesamiento de imágenes, etc; y sistemas en tiempo real, diseñados para responder a ciertos eventos externos en un plazo de tiempo muy limitado. En todos estos ejemplos aparecen de forma natural varios procesos concurrentes que cooperan entre sí para la consecución de su objetivo final, que es conseguir el funcionamiento correcto del sistema, tanto desde el punto de vista funcional como de eficiencia.

En principio, la concurrencia comenzó a ser estudiada en el marco del diseño de los sistemas operativos, donde surgen diversas situaciones en las que es necesario proteger un recurso compartido contra accesos concurrentes indiscriminados. Posteriormente, la aparición de los sistemas en tiempo real y de los sistemas distribuidos ha motivado que éste sea un campo de intensa investigación en la actualidad.

Ahora bien, la enorme complicación de estos sistemas concurrentes ha hecho imprescindible el desarrollo de modelos formales que permitan estudiar con rigor, con la consiguiente seguridad que ello comporta, la corrección de los sistemas diseñados. Los modelos introducidos se basan todos ellos en el concepto de *abstracción*, en el sentido de que todo modelo tal debe capturar únicamente aquellas



características del sistema considerado que se consideren importantes. En el caso del modelado de sistemas concurrentes abstraemos gran parte de las acciones desarrolladas por los procesos, para centrarnos, especialmente, en la cooperación entre los procesos, que es el punto de máxima dificultad en el diseño de sistemas concurrentes. Una vez construido el modelo, es necesario disponer de herramientas que nos permitan analizar determinadas propiedades de “buena conducta” del mismo. Las propiedades a estudiar se dividen en dos clases: por una parte tenemos las propiedades de seguridad (*safeness*), que garantizan que el sistema no alcanzará nunca un estado no deseado; y por la otra propiedades de actividad (*liveness*), que garantizan que el sistema, con independencia del estado en el que se encuentre, alcanzará eventualmente un determinado estado de un cierto conjunto de estados.

Dentro de los modelos formales introducidos distinguiremos los basados en “representaciones gráficas”, que expresan a un nivel espacial el paralelismo del sistema, de entre los cuales las Redes de Petri [Pet62] son sin duda el modelo más divulgado y estudiado, y los modelos algebraicos como CCS [Mil80, Mil89], CSP [Hoa78, Hoa85], ACP [BeKl84a, BeKl84b], etc, que se basan en un lenguaje estructurado con una serie de operadores, cada uno de los cuales expresa una forma distinta de construir un sistema a partir de otro u otros más simples.

## 1.2 Importancia del tiempo en las especificaciones

Tal y como hemos indicado anteriormente, la aparición de los sistemas en tiempo real ha originado que el factor tiempo, que antes era abstraído en los modelos, pase a ser considerado como un elemento especialmente importante de los mismos. Evidentemente, si debe diseñarse un sistema que sea capaz de responder a un cierto estímulo externo en un plazo de tiempo limitado, está claro que el modelo que utilicemos debe ser capaz de describir el tiempo a un nivel cuantitativo, y no sólo cualitativo, para así poder determinar si el diseño realizado satisface los requerimientos impuestos. Otro ejemplo igualmente interesante lo encontramos en el diseño de protocolos de comunicación, que constituyen uno de los productos software de mayor complejidad en su desarrollo. Los problemas que encontramos en el diseño de protocolos se relacionan con la necesidad de garantizar una fiabilidad

superior a la que habitualmente proporciona una vía de comunicación, lo que conlleva la aparición dentro del diseño de *time-outs*, que permiten la reemisión de un mensaje cuando se detecta, pasado un cierto tiempo, que no se ha recibido el preceptivo acuse de recibo del receptor del mismo.

En consecuencia, han aparecido diversas extensiones de los modelos clásicos que incorporan el tiempo como un factor más de diseño. Si nos centramos en primer lugar en los modelos algebraicos, podemos comenzar citando a Reed y Roscoe, que han definido una extensión temporizada de CSP [ReRo88] manteniendo los principios básicos del CSP clásico. En este modelo la ejecución de acciones no toma tiempo, pero se incluye un nuevo operador (*delay*) que permite modelar el paso del tiempo. Además, para evitar que se dé el fenómeno irreal de la ejecución en un período finito de tiempo de infinitas acciones, es necesario asumir un retraso mínimo entre la ejecución secuencial de cada par de acciones. Moller y Tofts [MoTo90] han definido una extensión temporizada del CCS, TCCS, donde de nuevo las acciones no toman tiempo y se crean nuevos operadores para diseñar el paso del tiempo, así como un nuevo operador de elección, llamado elección débil. Una aproximación diferente ha sido adoptada en [Ort90], donde se define una extensión temporizada de CSP, TCSP, basada en la idea de asociar duraciones a las acciones.

En el marco de las redes de Petri, contamos de nuevo con referencias más antiguas, entre las que destacaremos las que dieron lugar al estudio de dos extensiones temporizadas diferentes del modelo original. En la primera de ellas, las Redes de Petri con Tiempos (ver[Mer74]) las transiciones no toman tiempo en su disparo, pero se asocian a cada transición de la red dos números enteros, que representan, respectivamente, el primer instante en el que la transición *puede* ser disparada, y el instante final en el que ésta *debe* ser disparada, ambos períodos de tiempo contados desde el momento en el que la transición comienza a estar permitida. En la segunda extensión, las Redes de Petri Temporizadas (ver [Ram74]), son directamente las acciones quienes llevan una duración asociada. Es éste el modelo que estudiaremos a lo largo de esta tesis, centrándonos en el estudio de diversas propiedades sobre el mismo, obtenidas por lo general extendiendo de forma natural las propiedades clásicas de las Redes de Petri, concentrándonos en especial en el estudio de su decidibilidad.

Citaremos por último el modelo de Redes de Petri con Arcos Temporizados

introducido en [Wal83], que está basado en la asociación de un intervalo de tiempo a cada arco de la red de la forma  $(p, t)$ . En dicho modelo los tokens sobre los lugares tienen también asociada una *edad*, la cual es 0 cuando estos son generados, y va incrementándose con el paso del tiempo, hasta que el token sea consumido por el disparo de alguna transición. Una transición sólo puede dispararse cuando cada lugar precondición tenga un conjunto suficiente de tokens válidos, que son aquellos cuya edad está comprendida en el intervalo asociado al arco que conecta el lugar con la transición en cuestión. Aparecen así tokens *muertos*, cuya edad ya no les permite intervenir en el disparo de ninguna transición, pudiendo ser por tanto ignorados en lo sucesivo.

Una línea de investigación diferente, que no será abordada en esta tesis, la constituye la evaluación de rendimientos, que consiste en la utilización de estos modelos temporizados para extraer conclusiones acerca de los tiempos esperados de respuesta, de espera, etc. Se ha desarrollado así al efecto una nueva extensión de las Redes de Petri, las Redes de Petri Estocásticas [MBC84, FlNa85], que permite llevar a cabo tales estudios cuantitativos. En consecuencia, la realización de estos estudios requiere el uso exhaustivo de técnicas probabilísticas, como los procesos de Markov. Tales resultados se basan en ciertas hipótesis probabilísticas sobre el comportamiento de la red. Es mucha la investigación reciente centrada en este campo, citaremos por ejemplo [AMBC84, AMBC86, AMBB+89, RP84, HV85, Zub85, Cam90].

## 1.3 Resumen del Trabajo

En el capítulo 2 presentamos las definiciones, notaciones y técnicas que serán utilizadas en el resto del trabajo. Se describen así las principales técnicas de análisis de propiedades sobre Redes de Petri: el análisis por enumeración, el análisis por transformación, el análisis estructural y el análisis por simulación.

En el capítulo 3 se definen las Redes de Petri Temporizadas, asociando duraciones enteras positivas a las transiciones. El marcaje de una Red de Petri Temporizada incluye por tanto no sólo la distribución actual de tokens sobre la red, sino también la indicación de qué transiciones están en ejecución, y cuánto tiempo le queda a cada una de ellas para terminar. En cuanto a la regla de disparo, tenemos

que el disparo de una transición sustrae de forma inmediata los tokens correspondientes (según la regla clásica de disparo) de sus precondiciones, debiendo esperar para añadir los tokens correspondientes sobre las postcondiciones (también según la regla de disparo clásica) a que la transición termine su ejecución. Mientras tanto guardaremos cuenta de dicha transición en la lista de transiciones en ejecución. En consecuencia, los pasos vacíos son válidos en este modelo, reflejando el paso del tiempo sin que sea disparada ninguna nueva transición, pero modificándose la segunda componente del marcaje actual en tanto y cuanto no sea vacía, y también la primera en caso de producirse la terminación de alguna transición en ejecución.

Además, se definen dos semánticas restrictivas para las Redes de Petri Temporizadas, basadas en prohibir la ejecución simultánea de varias instancias de una misma transición (*semántica de secuencias de pasos temporizadas ss-finitas*), o bien únicamente el disparo simultáneo de varias instancias de una misma transición (*semántica de secuencias de pasos sds-finitas*).

En la sección 3.2 se definen las extensiones temporizadas de las propiedades clásicas sobre Redes de Petri, que serán objeto de estudio en los siguientes capítulos. En concreto se define una versión temporizada del alcance, la *alcanzabilidad estricta*, que consiste en determinar si un marcaje es alcanzable en un instante determinado. Se definen asimismo dos extensiones temporizadas de la ilimitación, la  $s, k$ -ilimitación lineal y la  $s$ -ilimitación uniforme; en la primera de ellas se mira si un lugar  $s$  puede tener en algún instante  $\beta$  mayor que  $k$  un número de tokens igual o mayor que  $\beta$ , mientras que en la segunda se mira si un lugar  $s$  desde cualquier marcaje alcanzable puede llegar a ganar tokens a mayor velocidad que el paso del tiempo. Definimos también una versión temporizada de la vivacidad, la  $\beta$ -vivacidad, que mira si desde cualquier marcaje alcanzable cada transición de la red es disparable en tiempo  $\beta$ . Finalmente, definimos la ausencia de  $\beta$ -bloqueos, en la que se mira si una red puede bloquearse en tiempo  $\beta$ .

En el capítulo 4 se presenta una codificación de las redes temporizadas por medio de redes no temporizadas, que nos permite estudiar la decidibilidad de las propiedades introducidas en el capítulo 3. La codificación se presenta gradualmente, comenzando con una primera versión que permite capturar la semántica de secuencias de pasos temporizadas ss-finitas de la red dada; es decir, se demuestra que para toda Red de Petri Temporizada con dicha semántica, toda secuencia de

pasos temporizada ss-finita puede ser simulada por una secuencia de ocurrencia sobre la red obtenida por la codificación. En un segundo paso, se presenta una codificación que cubre la semántica de secuencias de pasos sds-finitas.

Ambas codificaciones se basan en la definición de un autómata de estados finitos que modela la conducta de la red. En ambos casos, los estados del autómata nos indican las transiciones en ejecución, las entradas los conjuntos de transiciones disparadas, y las salidas los conjuntos de transiciones que terminan su ejecución. Cada transición de estados corresponde al paso de una unidad de tiempo. Los autómatas obtenidos son posteriormente codificados mediante sendas Redes de Petri No Temporizadas, en las que se añade además un lugar *reloj*, cuyo marcaje representa el instante actual de tiempo, produciéndose en consecuencia la adición de un nuevo token a dicho lugar cada vez que se produce una transición de estados en el autómata simulado.

Con dichas codificaciones es posible demostrar la decidibilidad de las propiedades introducidas en el capítulo 3, pues las mismas quedan reducidas a propiedades equivalentes sobre la Red de Petri No Temporizada obtenida, cuya decidibilidad es conocida o sencilla de demostrar.

La construcción general, que considera la semántica sin restricciones, se presenta en la sección 4.4. Esta construcción no puede seguir el mismo mecanismo que las anteriores, pues en general se obtendría como resultado una red con un número infinito de lugares. Comenzamos entonces considerando Redes de Petri No Temporizadas con la semántica de pasos, sobre las cuales pueden definirse propiedades análogas a las introducidas en el capítulo 3. Se presenta una codificación de las mismas mediante la semántica de secuencias de ocurrencia de dichas redes. Dicha codificación se basa en el disparo secuencial de las transiciones que constituyen un paso, distinguiendo entre la primera transición y las demás, para contabilizar de esa forma el número de pasos simulados. Para poder simular correctamente un paso no se restauran de forma inmediata los tokens obtenidos sobre las postcondiciones, sino que se crean unas copias de los lugares de la red de partida que recogen dichos tokens, en espera de que finalice la simulación de un paso. Una vez concluida la simulación de un paso se procede a instalar los tokens que se encuentran sobre dichos lugares sobre los lugares originales.

Esta codificación nos permite probar la decidibilidad de las propiedades citadas

sobre Redes de Petri No Temporizadas con su semántica de pasos.

En un segundo paso, las Redes de Petri Temporizadas se codifican mediante Redes No Temporizadas con la semántica de pasos, diviendo cada transición  $t$ , en función de su duración, en nuevas transiciones, cada una de las cuales corresponde a un instante en la ejecución de  $t$ . Esta codificación permite reducir la decidibilidad de las propiedades introducidas en el capítulo 3 a la decidibilidad de las propiedades análogas sobre Redes de Petri No Temporizadas con la semántica de pasos.

En el capítulo 5 se definen las Redes de Petri Temporizadas bajo la semántica de Máximo Paralelismo. Estas redes evolucionan en cada instante disparando un multiconjunto maximal de transiciones permitidas, lo que en principio obliga a considerar redes sin transiciones autónomas, pues la presencia de las mismas nos conduciría a la imposibilidad de encontrar un multiconjunto maximal de transiciones permitidas. De nuevo se definen dos modelos restrictivos, uno basado en forzar únicamente el disparo de una instancia de cada transición permitida (*máximo paralelismo débil*), y otro que sólo permite el disparo de conjuntos maximales (*máximo paralelismo débil conjuntista*).

Las propiedades introducidas en el capítulo 3, adaptadas a esta semántica de una forma natural, son analizadas bajo la semántica de máximo paralelismo sin restricciones. La propiedad de alcance estricto y la ausencia de  $\beta$ -bloqueos son trivialmente decidibles, bastando la inspección del árbol de accesibilidad hasta la profundidad  $\beta$  (pues no hay transiciones autónomas). Sin embargo, el problema ordinario de alcance es indecidible, lo que se demuestra definiendo una codificación de las Redes de Petri con Arcos Inhibidores mediante Redes de Petri Temporizadas con la semántica de máximo paralelismo. El resto de las propiedades se analizan mediante una codificación de las máquinas de registros por Redes de Petri Temporizadas con la semántica de máximo paralelismo. Utilizando la misma se demuestra la indecidibilidad de las propiedades de ausencia de bloqueos,  $s$ ,  $k$ -ilimitación lineal, ilimitación,  $s$ -ilimitación uniforme,  $\beta$ -vivacidad y vivacidad.

Posteriormente, en la sección 5.3 consideramos redes con transiciones autónomas (redes no restrictivas), estudiando la decidibilidad del problema de alcance estricto bajo la semántica de máximo paralelismo sobre transiciones no autónomas; es decir, el máximo paralelismo sólo se aplica sobre las transiciones no autónomas. No tiene sentido en este caso plantearse la decidibilidad de la ausencia de  $\beta$ -bloqueos,

debido a la presencia de transiciones autónomas. El resto de propiedades serán obviamente también indecidibles para esta semántica, pues las redes sin transiciones autónomas son un caso particular de éstas. La decidibilidad del alcance estricto se demuestra codificando las Redes de Petri No Temporizadas con la semántica de máximo paralelismo sobre transiciones no autónomas mediante Redes de Petri No Temporizadas, con la semántica de secuencias de ocurrencia, reduciendo el problema de alcance estricto a un conjunto finito de problemas de alcance de sub-marcajes. Después, este resultado se traslada de forma inmediata a las Redes Temporizadas.

La codificación se basa en considerar para cada transición  $t$  y cada lugar  $p$  de la red de partida una colección de  $\beta$  nuevos lugares. Asimismo, para cada transición de la red se introducen  $\beta$  copias de la misma que sustituyen a la transición original. Después de simular la ejecución de cada paso, una de las copias indicará el estado resultante en la red de partida una vez sustraídos los tokens de las precondiciones de las transiciones disparadas, no siendo modificado en lo sucesivo. Esta información se utilizará al final de la simulación para testear si se ha respetado la condición de máximo paralelismo sobre las transiciones no autónomas.

En el capítulo 6 se definen varios modelos de Redes con *time-outs*. Estos modelos se dividen en dos grupos: modelos sin transiciones especiales, en los que simplemente se asocia a ciertas transiciones de la red un número entero, que refleja el margen de tiempo que tiene dicha transición para dispararse; y modelos con transiciones especiales, que consideran la presencia de nuevas transiciones especiales (en tanto y cuanto la regla de disparo las trata de una forma especial), asociadas a ciertas transiciones de la red. Estas nuevas transiciones sólo están permitidas, debiendo además ser disparadas entonces, cuando cumple el *time-out* de la transición a la que van asociadas.

En ambos casos, definimos cuatro tipos de modelos de *time-outs*. El primer modelo que consideramos es el modelo dinámico basado en el estudio de las precondiciones, en el cual un *time-out* empieza a contar desde el momento en que una transición está permitida, y sólo se desactiva cuando la transición se dispara o cuando no hay suficientes tokens en un conflicto dinámico para disparar la transición simultáneamente junto con el paso ejecutado. Se pueden considerar dos

variantes del modelo, según el significado de los *time-outs*. Una primera posibilidad consiste en considerar que los *time-outs* representan un tiempo máximo de disparo, obligando a las transiciones a ocurrir cuando al *time-out* le quede una unidad de tiempo para cumplir. La segunda posibilidad consiste en imponer que la red se bloquee si un *time-out* llega a vencer. En ambos casos, es posible codificar mediante dichas redes con *time-outs* las redes con máximo paralelismo débil, de lo que se concluye que el problema de alcance es indecidible.

El segundo modelo considerado es el modelo dinámico basado en el estudio de las postcondiciones, en el que un *time-out* no se desactiva en tanto y cuando la transición asociada siga estando permitida en el marcaje obtenido tras la ejecución de un paso. De nuevo es posible considerar dos variantes del modelo; ahora bien, la primera de ellas, basada en forzar el disparo de conjuntos maximales de transiciones para las que reste una unidad de tiempo para que cumpla su *time-out* asociado, genera un modelo semántico un tanto extraño, por lo que decidimos abandonar su estudio. En lo que se refiere a la segunda variante, basada en el bloqueo semántico de la red cuando cumpla un *time-out*, la indecidibilidad del problema de alcance se prueba mostrando una codificación en base a dicho modelo de las Redes de Petri con Arcos Inhibidores.

El tercer modelo considerado es el modelo estático basado en las precondiciones, en el que un *time-out* se desactiva tanto con el disparo de una transición, como con la resolución de un eventual conflicto estructural en el que la transición esté involucrada. Este modelo semántico captura un máximo paralelismo "débil" en el que únicamente se obliga a disparar conjuntos de transiciones maximales, en el sentido de que sus elementos resuelvan todos los conflictos estructurales entre transiciones activables en el marcaje actual. Pero a pesar de las peculiaridades del modelo, la codificación de las Redes con Arcos Inhibidores mediante redes dotadas de la semántica de máximo paralelismo, también es válida para esta semántica, y por tanto, el problema de alcance es de nuevo indecidible.

El último modelo considerado es el modelo estático basado en el estudio de las postcondiciones, que funciona fijándose en la estructura de la red, a través del concepto de resolución de los conflictos estructurales. Así, un *time-out* se desactiva cuando se resuelve un conflicto estructural que involucra a la transición en cuestión, pero ello sólo si tras la ejecución del paso se han perdido tokens sobre alguno de los



lugares que motivó dicho conflicto estructural. Tal y como ocurría con el modelo dinámico basado en las postcondiciones, la semántica de disparos maximales genera comportamientos extraños, por lo que hemos desechado la profundización en su estudio. Por su parte, la semántica de bloqueos sigue permitiendo codificar las Redes con Arcos Inhibidores, por lo que de nuevo se concluye la indecidibilidad del problema de alcance.

En el capítulo 7 se estudian las Redes Temporizadas con duraciones racionales y duraciones reales. En este caso, el tiempo ya no es discreto, de modo que no puede ser controlado por medio de un reloj que avanza como antes, tic a tic a intervalos regulares, por pequeños que estos sean. Ello hace que el efecto del disparo de un multiconjunto de transiciones no pueda reflejarse en base al marcaje correspondiente al “instante siguiente” a aquel en el que se produjo. Por el contrario, dicho efecto tendrá que ser reflejado en el mismo instante del disparo a fin de que quede constancia inmediata de ello. Imponemos además la restricción de que en cada instante se dispare a lo más un único multiconjunto no vacío de transiciones, por lo que en cada instante tendremos a lo sumo dos marcajes diferentes. Ello es así a fin de evitar el disparo “en secuencia” en un mismo instante de tiempo de una cantidad infinita de transiciones, en contra del principio usual de finitud.

Los marcajes siguen siendo en este caso pares cuya primera componente nos indica la distribución actual de tokens sobre la red, y cuya segunda componente señala el conjunto de transiciones en ejecución, junto con el tiempo pendiente para la finalización de cada una de ellas.

Las Redes con duraciones racionales pueden ser codificadas mediante Redes con duraciones enteras, lo que nos permite demostrar la decidibilidad del problema de alcance, del de alcance estricto, de la ausencia de  $\beta$ -bloqueos y de la  $\beta$ -vivacidad. Sin embargo, dicha codificación no nos permite concluir la decidibilidad de las dos extensiones temporizadas de la propiedad de ilimitación, debido al cambio de escala que dicha codificación introduce, por lo que de momento dichas cuestiones han quedado abiertas.

En el caso de las Redes de Petri Temporizadas con duraciones reales, siguiendo estas mismas ideas no es posible codificar tales redes por medio de redes con duraciones enteras. Hemos visto de hecho que no se puede siquiera pensar en una leve modificación (tan pequeña como fuera precisa) de los instantes de disparo,

para ajustarlos a instantes racionales cercanos, pues con ello se podrían perder algunos marcajes alcanzables.

Ahora bien, utilizando una aproximación alternativa al problema, hemos sido capaces de definir una codificación que permite simular el funcionamiento de una red temporizada con duraciones reales hasta un cierto instante, la cual presentamos en la sección 7.2. Dicha codificación se basa en el conocimiento del instante simbólico (midiendo el tiempo tomando como unidades simbólicas las duraciones de las transiciones) en el que se produciría cada token. Al no compararse en principio los instantes de tiempo reales, tenemos que no se produce una simulación en “tiempo real” del funcionamiento de la red original, sino que se permite un disparo desordenado en el tiempo de las transiciones de la red original. Entrando más en detalle, en lo que se refiere a su posición en las secuencias de ocurrencia de la red construida por la codificación, cada token de dicha red obtenida va anotado con una cierta información, que refleja en la medida precisa la “historia” de ese token. Se obtiene así una red coloreada (con un conjunto finito de colores), que como es bien sabido puede ser codificada utilizando Redes de Petri No Temporizadas, con su semántica usual de secuencias de ocurrencia. Utilizando dicha codificación es posible decidir (al menos siempre que el instante  $\beta$  considerado no sea una combinación lineal con coeficientes enteros no negativos de las duraciones de las transiciones) la propiedad de alcance estricto, la  $\beta$ -vivacidad y la ausencia de  $\beta$ -bloqueos.

Sin embargo, no hemos podido determinar si las extensiones temporizadas de la propiedad de ilimitación (la  $s, k$ -ilimitación lineal y la  $s$ -ilimitación uniforme) son en este caso decidibles o no.

Los capítulos 8 y 9 están dedicados al estudio de la decidibilidad de la bisi-mulación preservando historias (ver [RT88, Vog91]). En concreto, en la sección 8.1 revisamos un concepto clásico de la teoría de Redes de Petri Ordinarias, como el que constituyen los *procesos de Redes de Petri*. En la sección 8.2 definimos los *eap*-procesos, que capturan cada paso ejecutado sobre la red de partida en un solo evento, para estudiar si con tal modificación se obtiene una información sobre paralelismo más refinada, obteniendo una respuesta negativa, que fortalece la elección de la definición clásica de dicho concepto.

En la sección 8.3 se incluye la demostración de Vogler [Vog91] de la decidibilidad

de la bisimulación preservando historias para Redes No Temporizadas 1-seguras con su semántica de secuencias de ocurrencia, extendiéndose dicho resultado para la semántica de pasos. Dicha demostración se basa en el concepto de *marcaje ordenado*, que introduce en el concepto de marcaje una cierta información que nos indica el orden de generación de sus tokens. En base a dicha información se define una nueva relación (*OM-bisimulación*), que se prueba es equivalente a la bisimulación preservando historias. De dicha equivalencia, y teniendo en cuenta que el número de posibles marcajes ordenados de una Red de Petri No Temporizada 1-segura es finito, se concluye la decidibilidad de la bisimulación preservando historias.

Posteriormente, en la sección 8.4 extendemos dichos resultados a redes n-seguras con su semántica de pasos. Se prueba primero el resultado para una semántica de secuencias de ocurrencia (sobre redes n-seguras), tal como se hizo en la sección anterior, y después se extiende dicho resultado a la semántica de pasos.

En el capítulo 9 se demuestra la decidibilidad de la bisimulación preservando historias para Redes de Petri Temporizadas 1-seguras. Para ello, en la sección 9.1 se definen los procesos temporizados, que extienden de forma natural a las Redes de Petri Temporizadas el concepto de proceso. Se define un concepto de compatibilidad entre procesos temporizados y secuencias de pasos temporizadas, y se prueban resultados similares a los presentados en la sección 8.1.

La sección 9.2 está dedicada a la prueba de la decidibilidad de la bisimulación preservando historias para Redes de Petri Temporizadas. La demostración está inspirada en la prueba de la citada propiedad para redes sin tiempos, presentada en el capítulo 8. Así, se comienza definiendo el concepto de *marcaje ordenado temporizado*, que en este caso requiere incorporar una tercera componente, que nos indica que tokens existentes en la red serán menores o iguales que los que genere, cuando termine, cada transición en ejecución. Posteriormente se define la *TOM-bisimulación*, versión temporizada de la OM-bisimulación, demostrándose que es equivalente a la bisimulación preservando historias, lo que permite de nuevo concluir la decidibilidad de esta última noción.

Para finalizar, en el capítulo 10 presentamos un resumen de algunos trabajos relacionados, en los que se definen diferentes modelos temporizados de Redes de Petri, y se estudian diversas propiedades sobre los mismos. Hemos dejado para el

final la presentación de los trabajos relacionados, en contra de lo que suele ser usual, porque aparte de ciertas definiciones, no hemos encontrado en la bibliografía a la que hemos tenido acceso trabajo alguno en la misma línea que el nuestro, de modo que no siendo necesaria la lectura previa de dichos trabajos para una completa comprensión de nuestro trabajo, hemos preferido dejar dicho estudio para el final, una vez que esté ya disponible todo el bagaje técnico desarrollado a lo largo de nuestro trabajo, evitándose así repeticiones innecesarias.



# Capítulo 2

## Generalidades

En este capítulo presentamos una revisión de los principales conceptos relacionados con las Redes de Petri. Por tanto, el objetivo de este capítulo será proporcionar la base de trabajo de los siguientes, así como fijar la notación que va a ser utilizada a lo largo de la tesis. Puesto que los resultados presentados en este capítulo son clásicos en la teoría sobre Redes de Petri, algunas demostraciones son omitidas, indicando únicamente las citas bibliográficas en las que pueden encontrarse.

### 2.1 Notación

La notación empleada a lo largo de este trabajo será la siguiente:

#### 1. Números

Denotaremos por  $\mathbb{N}$  los números naturales incluyendo el 0, por  $\mathbb{N}^+$  los naturales excluyendo el 0, y denotaremos por  $\mathbb{Z}$  al conjunto de números enteros. Asimismo, denotaremos por  $\mathbb{Q}$  los números racionales, y por  $\mathbb{Q}^+$  los números racionales positivos.

#### 2. Conjuntos y Multiconjuntos

Utilizaremos la notación usual para trabajar con conjuntos. El cardinal de un conjunto  $A$  se denotará de la forma  $|A|$ .

Los multiconjuntos se considerarán formalmente como funciones con codominio en  $\mathbb{N}$ , aunque en ocasiones se utilizará para ellos una notación conjuntista. Así, diremos que  $x \in R$ , para un multiconjunto  $R : A \longrightarrow \mathbb{N}$  sii

$R(x) > 0$ ; asimismo utilizaremos el símbolo  $\emptyset$  para denotar el multiconjunto vacío ( $R(x) = 0, \forall x \in A$ ); mientras que, por ejemplo, un multiconjunto que consta de dos instancias de un elemento  $x$  y una instancia de un elemento  $y$  será denotado en la forma  $\{2x, 1y\}$ . Dado un conjunto  $A$ , denotaremos por  $B(A)$  el conjunto de multiconjuntos sobre  $A$ .

### 3. Relaciones

Dado un conjunto  $X$ , una relación sobre  $X$  será un conjunto  $R \subseteq X \times X$ . Llamaremos dominio de  $R$  al conjunto  $dom(R)$  definido de la forma siguiente:

$$dom(R) = \{x \in X \mid \exists y \in X : (x, y) \in R\}$$

y codominio de  $R$  al conjunto  $cod(R)$  definido como sigue:

$$cod(R) = \{x \in X \mid \exists y \in X : (y, x) \in R\}$$

Dada una relación  $R$ , se define el *cierre reflexivo y transitivo* de  $R$ ,  $R^*$ , como sigue:

$$R^* = \{(x, y) \mid x = y \vee \exists x_1, \dots, x_n, (x, x_1) \in R, \dots, (x_n, y) \in R\}$$

Asimismo, se define el *cierre transitivo* de  $R$ ,  $R^+$ , como sigue:

$$R^+ = \{(x, y) \mid \exists x_1, \dots, x_n, (x, x_1) \in R, \dots, (x_n, y) \in R\}$$

### 4. Vectores

La notación empleada para representar los vectores será la usual, mediante tuplas. En el caso de vectores con componentes en  $\mathbb{N}$ , diremos que  $v \geq w$  si todas las componentes de  $v$  son mayores o iguales que las correspondientes de  $w$ . Además, diremos que  $v > w$  si  $v \geq w$  y  $v \neq w$ .

## 2.2 Redes de Petri

**Definición 2.1** (Redes de Petri Ordinarias)

Una terna  $N = (P, T, F)$ , formada por dos conjuntos  $P$  y  $T$ , y una relación  $F$  definida sobre  $P \cup T$ , se dice que es una *Red de Petri Ordinaria* si satisface:

1.  $P \cap T = \emptyset$

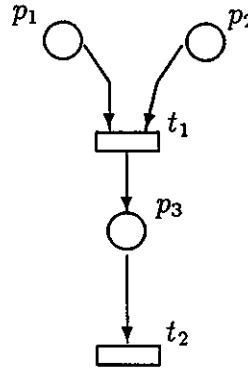


Figura 1: Ejemplo de Red de Petri

$$2. F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$$

$$3. \text{dom}(F) \cup \text{cod}(F) = P \cup T$$

Al conjunto  $P$  se le llama *conjunto de lugares*, al conjunto  $T$  *conjunto de transiciones* y a  $F$  *relación de flujo*.  $F$  relaciona lugares con transiciones en forma de arcos entre lugares y transiciones o entre transiciones y lugares. Salvo que se indique lo contrario, supondremos que las redes con las que trabajaremos son finitas (los conjuntos  $P$  y  $T$  son finitos). Las redes de Petri pueden representarse gráficamente por medio de grafos bipartitos, que son grafos que constan de dos tipos de nodos (lugares y transiciones). Los lugares se representan con círculos y las transiciones con rectángulos.

Sea el conjunto  $X = P \cup T$ . Entonces, para todo  $x \in X$  se definen los conjuntos siguientes:  $\bullet x = \{y \in X \mid (y, x) \in F\}$  (preconjunto de  $x$ ),  $x^\bullet = \{y \in X \mid (x, y) \in F\}$  (postconjunto de  $x$ ).

Se dice que  $N$  es  $T$ -restringida sii  $\bullet t = t^\bullet = \emptyset \ \forall t \in T$ . □

**Ejemplo 2.1** Sea  $N = (P, T, F)$ , siendo:

$$P = \{p_1, p_2, p_3\}$$

$$T = \{t_1, t_2\}$$

$$F = \{(p_1, t_1), (p_2, t_1), (t_1, p_3), (p_3, t_2)\}$$

Esta red está representada gráficamente en la figura 1. □



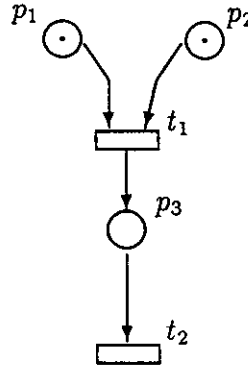


Figura 2: Ejemplo de Red de Petri Marcada

**Definición 2.2** (Marcajes de Redes de Petri Ordinarias)

Sea  $N = (P, T, F)$  una Red de Petri Ordinaria. Una función  $M : P \rightarrow \mathbb{N}$  se llama un *marcaje de  $N$* . Entonces,  $(P, T, F, M)$  se llama una *Red de Petri Ordinaria Marcada*.  $\square$

Los marcajes de las redes de Petri se representan gráficamente incluyendo en cada lugar tantos puntos como tokens le corresponden, o bien anotando cada lugar con el número de tokens asociado al mismo.

**Ejemplo 2.2** En la Red de Petri del ejemplo 1 podemos considerar el siguiente marcaje:

$$M(p_1) = 1, \quad M(p_2) = 1, \quad M(p_3) = 0$$

La representación gráfica de la misma, correspondiente a la primera variante, puede verse en la figura 2.  $\square$

La semántica de una Red de Petri está definida mediante la siguiente regla de disparo, que define el marcaje alcanzado tras el disparo de una transición.

**Definición 2.3** (Regla de Disparo)

Sea  $N = (P, T, F, M)$  una Red de Petri Ordinaria Marcada. Una transición  $t \in T$  se dice que *está permitida bajo el marcaje  $M$* , lo cual se denota por  $M[t]$ , si para todo lugar  $p \in P$  tal que  $(p, t) \in F$  se verifica  $M(p) > 0$ .

El disparo de una transición permitida  $t$  bajo el marcaje  $M$  resulta en un nuevo marcaje de la red,  $M'$ , definido de la forma siguiente:

$$M'(p) = M(p) - W_f(p, t) + W_f(t, p) \quad \forall p \in P$$

siendo  $W_f(x) = 1$  si  $x \in F$  y  $W_f(x) = 0$ , para  $x \notin F$ , para todo  $x \in (T \times P) \cup (P \times T)$ . Ello se denota en la forma  $M[t]M'$ .  $\square$

**Ejemplo 2.3** En el ejemplo 2, el disparo de la transición  $t_1$  conduce la red al marcaje  $M'$ :

$$M'(p_1) = 0, \quad M'(p_2) = 0, \quad M'(p_3) = 1$$

$\square$

**Definición 2.4** (Activación Concurrente de Transiciones)

Sea  $N = (P, T, F, M)$  una Red de Petri Ordinaria Marcada. Sea  $R \subseteq T$  un conjunto de transiciones de la red. Se dice que *las transiciones de  $R$  están permitidas concurrentemente*, lo que se denota por  $M[R]$  sii  $M(p) \geq \sum_{t \in R} W_f(p, t)$ ,  $\forall p \in P$ , donde  $W_f(p, t)$  está definido de la misma forma que en la definición anterior.

Podemos incluso extender esta definición a multiconjuntos, permitiendo así la posibilidad de que varias instancias de una misma transición sean disparadas en un solo paso. De esta forma, diremos que un multiconjunto de transiciones  $R$  está permitido bajo el marcaje  $M$  sii  $M(p) \geq \sum_{t \in T} W_f(p, t) \cdot R(t)$ ,  $\forall p \in P$ .

El disparo de un multiconjunto de transiciones  $R$  bajo el marcaje  $M$  conduce la red a un nuevo marcaje  $M'$ , dado por:

$$M'(p) = M(p) - \sum_{t \in T} (W_f(p, t) - W_f(t, p)) \cdot R(t)$$

Esta evolución de la red en un solo paso la denotaremos por  $M[R]M'$ .  $\square$

**Definición 2.5** (Redes de Petri Generalizadas)

Una Red de Petri Generalizada (aunque en el futuro nos permitiremos eventualmente la licencia de llamarlas simplemente Redes de Petri) es una tupla  $N = (P, T, F, K, W)$ , donde:

1.  $(P, T, F)$  es una Red de Petri Ordinaria.
2.  $K : P \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  es una función que indica el número máximo de tokens que puede haber en cada lugar (*función de capacidad*).
3.  $W : F \longrightarrow \mathbb{N}^+$  es una función que indica la multiplicidad de cada arco (*pesos de los arcos*).

Se suele omitir la función de capacidad, por innecesaria, si ésta es infinita para todos los lugares. Además, es usual extender la definición de  $W$  a todo el universo de posibles arcos, haciéndola nula para pares  $(p, t)$  o  $(t, p)$  que no estén en  $F$ .  $\square$

**Definición 2.6** (Regla de Disparo para Redes de Petri Generalizadas)

Sea  $N = (P, T, F, K, W)$  una Red de Petri Generalizada.

1. Una función  $M : P \longrightarrow \mathbb{N}$  se dice que es un *marcaje* de  $N$  sii  $M(p) \leq K(p)$ , para todo  $p \in P$ .
2. Una transición  $t \in T$  está permitida bajo un marcaje  $M$ , lo que se denota por  $M[t]$  sii  $W(p, t) \leq M(p) \leq K(p) - W(t, p)$ , para todo  $p \in P$ . El disparo de  $t$  resulta en un nuevo marcaje de la red  $M'$ , dado por:  $M'(p) = M(p) - W(p, t) + W(t, p)$ , para todo  $p \in P$ . De nuevo, esta evolución la denotamos por  $M[t]M'$ .
3. Un multiconjunto de transiciones  $R$  está permitido bajo el marcaje  $M$ , lo que se denota por  $M[R]$ , si y sólo si  $M(p) \geq \sum_{t \in T} W(p, t) \cdot R(t)$ . El disparo de  $R$  resulta en un nuevo marcaje  $M'$ , dado por:

$$M'(p) = M(p) - \sum_{t \in T} (W(p, t) - W(t, p)) \cdot R(t), \quad \forall p \in P$$

Lo que se denota por  $M[R]M'$ .

$\square$

**Definición 2.7** Sea  $N = (P, T, F, K, W, M_0)$  una Red de Petri Marcada.

1. Se dice que  $\sigma = M_0 t_1 M_1 \dots t_n M_n$  es una secuencia de ocurrencia finita de  $N$  si y sólo si  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $M_{i-1}[t_i]M_i$ . En algunas ocasiones denotaremos las secuencias de ocurrencia en la forma  $t_1 \dots t_n$ , ya que a partir del marcaje de partida  $M_0$  y a partir de la secuencia de transiciones disparadas a partir de él, es posible obtener los demás marcajes  $M_i$ .

Extendemos la notación habitual a secuencias de ocurrencia, obteniendo  $M_0[\sigma]M_n$ . Se denota mediante  $L(N, M_0)$  al conjunto de secuencias de ocurrencia de  $N$  que parten de  $M_0$ .

2. Se dice que  $\sigma = M_0 R_1 M_1 \dots R_n M_n$  es una secuencia de pasos finita de  $N$  si y sólo si  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, M_{i-1} [R_i] M_i$ . De nuevo se extiende la notación habitual a secuencias de pasos:  $M_0[\sigma] M_n$ . Se denota por  $P(N, M_0)$  al conjunto de secuencias de pasos de  $N$  que parten de  $M_0$ .

□

En lo sucesivo trabajaremos usualmente sobre la semántica de secuencias de ocurrencia, salvo que explícitamente se indique lo contrario.

**Definición 2.8** (Matrices de Incidencia)

Sea  $N = (P, T, F, W, M_0)$  una Red de Petri Marcada.

1. Se dice que  $N$  es *pura* sii  $\forall t \in T, \forall p \in P, W(t, p) \cdot W(p, t) = 0$ .
2. Si  $N$  es una red pura, podemos definir su *matriz de incidencia previa*,  $C^- = (c_{i,j}^-)$ ,  $i = 1, \dots, |P|$ ;  $j = 1, \dots, |T|$ , siendo  $c_{i,j}^- = W(p_i, t_j)$ , y su *matriz de incidencia posterior*  $C^+ = (c_{i,j}^+)$ ,  $i = 1, \dots, |P|$ ;  $j = 1, \dots, |T|$ , siendo  $c_{i,j}^+ = W(t_j, p_i)$ .
3. Si  $N$  es una red pura se define su *matriz de incidencia*  $C$  por medio de  $C = C^+ - C^-$ .

□

La matriz de incidencia puede ser definida también sobre redes que no sean puras, pero en tal caso no caracteriza a las mismas, pues una misma matriz de incidencia corresponde a varias redes diferentes.

**Ejemplo 2.4** Es sencillo obtener dos Redes de Petri diferentes con la misma matriz de incidencia. Para ello basta tomar una Red de Petri Ordinaria y elegir un lugar y una transición no conectados inicialmente, y conectarlos formando un loop. Por ejemplo, las dos redes de la figura 3 tienen la misma matriz de incidencia. De hecho, si se trabaja con Redes Generalizadas el añadido se puede hacer sobre cualquier par.

□

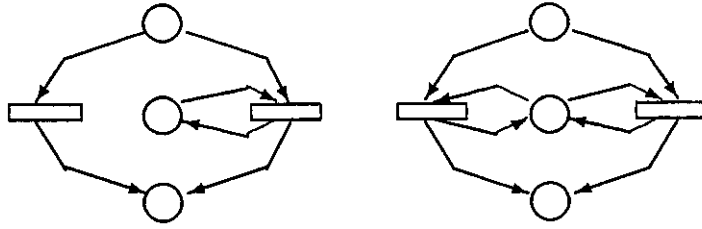


Figura 3: Dos Redes de Petri con la misma Matriz de Incidencia

**Proposición 2.1** (Ecuación de Estado)

Sea  $N = (P, T, F, W, M_0)$  una Red de Petri Marcada Pura,  $\sigma \in L(N, M_0)$ , y  $M_0[\sigma)M$ . Entonces se tiene:  $M = M_0 + C \cdot \bar{\sigma}$ , siendo  $\bar{\sigma}$  el vector de Parikh asociado a la secuencia  $\sigma$ , que está definido como  $\bar{\sigma}(i) = \text{número de ocurrencias de la transición } t_i \text{ en la secuencia } \sigma$ .

**Demostración:** Sea la secuencia de marcajes producida a lo largo de la ejecución de  $\sigma$ :  $M_0 t_{i_1} M_1 \dots t_{i_n} M_n$ . Entonces, de la regla de disparo se concluye que  $M_1 = M_0 + C \cdot U_{i_1}$ , siendo  $U_{i_1}$  el vector cuyas componentes son todas nulas, salvo la  $i_1$ -ésima, que vale 1. En general, se obtiene que  $M_k = M_{k-1} + C \cdot U_{i_k}$ .

Por tanto:

$$M_k = M_{k-2} + C \cdot (U_{i_{k-1}} + U_{i_k}) = \dots = M_0 + C \cdot \sum_{j=1}^k U_{i_j}$$

Ahora bien,  $\sum_{j=1}^k U_{i_j} = \bar{\sigma}$ , lo que termina la demostración. □

## 2.3 Análisis de Redes

Cuando se plantea el diseño de un sistema, aparte del interés que suscita el tener un modelo gráfico del mismo, resulta importante disponer de herramientas que nos permitan obtener propiedades a partir del modelo considerado. En el caso de los sistemas concurrentes, la verificación del cumplimiento de ciertas propiedades se hace más difícil que en el caso de los sistemas secuenciales, por lo que dichas herramientas cobran un particular interés. El análisis de la conducta de los sistemas tiene por objeto determinar el cumplimiento de ciertas propiedades, como por ejemplo, que el número de procesos en una cierta cola del sistema no excede cierta

cantidad, que se garantiza la exclusión mutua en el acceso a cierto recurso del sistema, etc.

En el caso de las Redes de Petri, junto con su notable interés para el modelado de sistemas, por su naturaleza gráfica que permite tener un modelo fácilmente comprensible de un sistema, se tiene también una herramienta poderosa para analizar formalmente el cumplimiento de determinadas propiedades de buena conducta de los mismos, como la ausencia de bloqueos, la alcanzabilidad de un cierto estado, la posibilidad de alcanzar la situación de partida del sistema con independencia de su estado actual, etc.

Habitualmente se dividen las propiedades de los sistemas en dos clases:

### 2.3.1 Propiedades de Seguridad

Garantizan que el sistema no alcanzará nunca un conjunto de estados no deseados, o que nunca ejecutará una secuencia de pasos que pertenezca a un determinado conjunto.

Son propiedades de Seguridad las siguientes:

1. **Propiedad de Alcance.** Un marcaje  $M$  de una Red de Petri Marcada  $N = (P, T, F, W, M_0)$  se dice que es *alcanzable* en  $N$  sii existe una secuencia de ocurrencia  $\sigma \in L(N, M_0)$  tal que  $M_0[\sigma]M$ . Denotamos por  $[M_0]$  al conjunto de marcajes alcanzables en  $N$  a partir del marcaje inicial  $M_0$ , y por  $[M]$  al conjunto de marcajes alcanzables en  $N$  a partir de un marcaje  $M$ .
2. **Propiedad de Seguridad.** Una Red de Petri Marcada  $N = (P, T, F, W, M_0)$  es *n-segura*, para un cierto  $n \in \mathbb{N}$  dado, si todo marcaje alcanzable  $M$  a partir de  $M_0$  cumple la propiedad  $M(p) \leq n$ , para todo  $p \in P$ . Las redes 1-seguras se llaman habitualmente *seguras*, y en ellas los marcajes pueden identificarse con subconjuntos de lugares.  
  
Bajo los mismos requisitos, se dice que un lugar  $p \in P$  es *n-seguro* si  $M(p) \leq n$ , para todo marcaje alcanzable  $M$  a partir de  $M_0$ .
3. **Propiedad de Limitación.** Sea  $N = (P, T, F, W, M_0)$  una Red de Petri Marcada. Se dice que un lugar  $p \in P$  es limitado si existe un número natural

$n \in \mathbb{N}$  tal que dicho lugar es  $n$ -seguro; y se dice que  $N$  es *limitada* si todos sus lugares son limitados.

4. **Ausencia de Bloqueos.** Dada una Red de Petri Marcada  $N = (P, T, F, W, M_0)$ , y un marcaje alcanzable  $M$  a partir de  $M_0$ . Se dice que  $M$  es un *marcaje muerto* si no existe ninguna transición permitida bajo dicho marcaje. La red  $N$  se dice que está *libre de bloqueos* si no existe ningún marcaje alcanzable muerto.
5. **Conservación Respecto a un Vector de Pesos.** Sea una Red de Petri Marcada  $N = (P, T, F, W, M_0)$ , con  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ . Se dice que  $N$  es *conservativa respecto a un vector de pesos*  $w$ , con  $w \in \mathbb{N}^n$ , si para todo marcaje alcanzable  $M$  a partir de  $M_0$  se cumple:

$$\sum_{i=1}^n w_i \cdot M(p_i) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot M_0(p_i)$$

6. **Cubrimiento de Marcajes.** Sea una Red de Petri Marcada  $N = (P, T, F, W, M_0)$ . Dado un marcaje  $M$  de  $N$ , se dice que  $N$  cumple la propiedad del cubrimiento de marcajes para el marcaje  $M$  si existe  $M' \in [M_0]$  tal que  $M' \geq M$ .

NOTA: Para ser más precisos, la alcanzabilidad no es exactamente una propiedad de seguridad, sino la negación de la propiedad, la no alcanzabilidad. Análogamente ocurre con el cubrimiento de marcajes.

### 2.3.2 Propiedades de Actividad

Garantizan que el sistema, con independencia de su estado actual, podrá eventualmente alcanzar un determinado estado de un cierto conjunto de estados, o podrá eventualmente ejecutar una cierta secuencia de eventos. Son propiedades de actividad las siguientes:

1. **Vivacidad.** Sea  $N = (P, T, F, W, M_0)$  una Red de Petri Marcada. Una transición  $t \in T$  se dice que es *viva* si para todo marcaje alcanzable  $M \in [M_0]$  existe una secuencia de ocurrencia  $\sigma$  que parte de  $M$  tal que  $\sigma = t_1 \dots t_m$ , con  $t_m = t$ . Se dice que  $N$  es *viva* si todas sus transiciones son vivas.

2. **Home State.** Sea  $N = (P, T, F, W, M_0)$  una Red de Petri Marcada. Se dice que un marcaje  $M$  de  $N$  es un *home state* si para todo  $M' \in [M_0]$  se tiene  $M \in [M']$ .
3. **Home Space.** Sea  $N = (P, T, F, W, M_0)$  una Red de Petri Marcada. Se dice que un conjunto de marcajes  $\mathcal{M}$  es un *home-space* de  $N$  si para todo marcaje  $M' \in [M_0]$  existe un marcaje  $M'' \in \mathcal{M}$  tal que  $M'' \in [M']$ .
4. **Ciclicidad.** Sea  $N = (P, T, F, W, M_0)$  una Red de Petri Marcada. Se dice que  $N$  tiene un *comportamiento cíclico* si para todo marcaje  $M \in [M_0]$  existe una secuencia de ocurrencia  $\sigma$  que parte de  $M$  tal que  $M[\sigma]M_0$ .

### 2.3.3 Decidibilidad del Alcance y la Vivacidad

Al abordarse el estudio de la decidibilidad de algunas de estas propiedades anteriormente citadas, se comprobó que en absoluto se trataba de problemas sencillos, no encontrándose en principio en la mayor parte de las ocasiones más que un mecanismo de reducibilidad que nos permitiría resolver unos problemas reduciéndolos a otros en apariencia más sencillos. De esta forma, la decidibilidad de la propiedad de alcance apareció como básica para resolver la decidibilidad de las demás. Sin embargo, pronto se constató que la prueba de la decidibilidad del alcance no era ni mucho menos sencilla. Por ello, se plantearon las siguientes propiedades relacionadas con la alcanzabilidad, a las que se consiguió reducir esta última.

1. **Propiedad de Alcance de Submarcajes.** Sea  $N = (P, T, F, W, M_0)$  una Red de Petri Marcada. Dado  $P' \subseteq P$ , se dice que  $N$  cumple la propiedad de Alcance de Submarcajes para  $P'$  si existe un marcaje  $M' \in [M_0]$  tal que  $M'(p) = M(p)$ ,  $\forall p \in P'$ .
2. **Propiedad de Alcance Nulo.** Sea  $N = (P, T, F, W, M_0)$  una Red de Petri Marcada.  $N$  cumple la propiedad de Alcance Nulo sii  $0 \in [M_0]$ , donde  $0$  es el vector cuyas componentes son todas nulas.
3. **Propiedad de Alcance Nulo de un Solo Lugar.** Sea  $N = (P, T, F, W, M_0)$  una Red de Petri Marcada. Dado  $p_0 \in P$ , se dice que  $N$  cumple la propiedad de Alcance Nulo de un Solo Lugar para  $p_0$  si existe un marcaje  $M \in [M_0]$  tal que  $M(p_0) = 0$ .



**Teorema 2.1** En lo que a su decidibilidad se refiere, son equivalentes los siguientes problemas.

1. El problema de alcance.
2. El problema de alcance de submarcajes.
3. El problema de alcance nulo.
4. El problema de alcance nulo de un solo lugar.

**Demostración:** Ver [Pet81].

□

Sin embargo, a pesar de este resultado, posteriormente se vio que la dificultad de resolver cualquiera de los tres nuevos problemas introducidos es la misma que la de resolver el problema de alcance. En todo caso, aunque no se conocía si esta propiedad era decidible, sí se obtuvieron resultados que ya dejaban ver que en caso de que fuera decidible, la complejidad del algoritmo empleado sería prohibitiva (por ejemplo, Lipton [Lip76] demostró en 1976 que un algoritmo para resolver el problema de alcance requeriría al menos una cantidad exponencial de espacio de almacenamiento y de tiempo con respecto al número de arcos de la red). Finalmente, la decidibilidad del problema de alcance fue resuelta en 1981 por Mayr (ver [May81]), y más tarde por Kosaraju (ver [Kos82]) que corrigió algunos errores de la demostración original. Pueden encontrarse demostraciones más legibles en [Lam86, Reu90, Lam92].

Una vez probada la decidibilidad del problema de alcance, se obtuvo inmediatamente la decidibilidad del problema de vivacidad, pues previamente [Pet81] también se había probado que dicho problema era equivalente al problema de alcance. Posteriormente pudo hacerse lo propio con otras propiedades. Así [Fru86] probó la decidibilidad de la propiedad de ser *home-state*, posteriormente extendida a *home-spaces* en [JoFr91].

### 2.3.4 Técnicas de Análisis de Propiedades

Las técnicas de análisis de propiedades de Redes de Petri suelen clasificarse en 4 grupos:

- Análisis por enumeración.
- Análisis por transformación.
- Análisis estructural.
- Análisis por Simulación.

### Análisis por enumeración

En el análisis por enumeración se construye un árbol de marcajes, que expresa las posibles evoluciones de la red. El árbol así obtenido se llama *árbol de accesibilidad*, el cual es en general infinito. Por ello, aún a costa de perder cierta información, se define el llamado *árbol de cobertura*, que es siempre finito (para redes finitas), lo que permite estudiar sobre él aquellas propiedades para las que dicho árbol proporcione la información necesaria para establecer su decidibilidad.

#### Definición 2.9 (Arbol de Cobertura)

Sea  $N = (P, T, F, W, M_0)$  una Red de Petri Marcada. Se define el *árbol de cobertura* de  $N$ ,  $T(N)$ , de la forma siguiente:

1. La raíz se etiqueta con el marcaje inicial  $M_0$ .
2. Un nodo  $x$  etiquetado con un marcaje  $M$  es una hoja del árbol si ocurre una de las siguientes posibilidades:
  - (a) O bien no existe ninguna transición permitida bajo  $M$ .
  - (b) O bien hay un nodo  $y$ ,  $y \neq x$ , en el camino que va desde la raíz a  $x$ , etiquetado también con  $M$ .
3. Si  $x$  es un nodo con etiqueta  $M$ , y no es una hoja, entonces para cada transición  $t$  permitida por  $M$  se introduce un nuevo arco en el árbol, etiquetado con esa transición  $t$ , con destino en un nuevo nodo  $y$ , cuya etiqueta se obtiene en base a los pasos siguientes:
  - (a) Para todo lugar  $p \in P$  se calcula:  $\tilde{M}(p) = M(p) + W(p, t) - W(t, p)$ .

- (b) Si en el camino de la raíz a  $x$  hay un nodo  $z$ ,  $z \neq y$ , con etiqueta  $M''$  tal que:  $\tilde{M}(p) \geq M''(p)$ , para todo  $p \in P$ , entonces se etiqueta el nodo  $y$  con  $M'$ , definido de la forma siguiente:

$$M'(p) = \begin{cases} \tilde{M}(p) & \text{si } \tilde{M}(p) = M''(p) \\ \omega & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- (c) Si la condición anterior resulta falsa, se hace  $M' = \tilde{M}$ , y el nodo  $y$  se etiqueta con  $M'$ .

En esta definición se considera que  $n < \omega$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , y que  $n + \omega = \omega + n = \omega + \omega = \omega - n = \omega$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Teorema 2.2** El árbol de cobertura de toda Red de Petri Marcada  $N$ ,  $T(N)$ , es finito.

**Demostración:** Ver [Pet81].  $\square$

No es posible decidir mediante el árbol de cobertura la propiedad de alcance, pues no puede establecerse si un marcaje concreto pertenece o no al alcance de la red. Sin embargo, sí es posible decidir el cubrimiento de marcajes, así como la seguridad, limitación y conservación (ver [Bes86, BF86, Pet81]).

El siguiente teorema, extraído de [Fru86], establece que para toda red  $N$  es posible encontrar un conjunto finito de marcajes accesibles con la propiedad de que cualquier marcaje accesible de  $N$  cubre a alguno de los marcajes de este conjunto.

**Teorema 2.3** Sea  $N = (P, T, F, W, M_0)$  una Red de Petri Marcada. Existe un conjunto finito de marcajes alcanzables en  $N$ ,  $\{M_B^1, \dots, M_B^b\}$ , tales que  $\forall M \in [M_0]$  existe  $i \in \{1, \dots, b\}$  tal que  $M_B^i \subseteq M$ .

**Demostración:** Ver [Fru86].  $\square$

### Análisis por transformación

En el análisis por transformación se aplican diversos mecanismos de reducción de redes que se aplican a una red para obtener redes más sencillas, que preservan algunas propiedades de la red de partida, lo que permite estudiar sobre estas últimas dichas propiedades. Las simplificaciones más usuales consisten en eliminar

los lugares implícitos (ver [Sif78, Esp90]), lo que conserva la vivacidad y limitación de la red de partida, o bien el reemplazamiento de una subred por un único lugar (ver [Bra86]), cuando ésta cumple ciertas condiciones. De nuevo, esta reducción preserva la limitación y vivacidad. Otras técnicas de reducción (ver [Ber80, Bra86]) se basan en sustituir un lugar por un conjunto de transiciones, o en la eliminación de algunas transiciones irrelevantes en el funcionamiento de la red, etc.

### Análisis Estructural Basado en el Algebra Lineal

Los métodos de análisis estructural estudian las propiedades de las redes de Petri haciendo uso exclusivamente de su topología. Estos métodos se dividen en dos grupos, con relación a las herramientas que utilizan: Métodos basados en el álgebra lineal y métodos de cerrojos y trampas.

Los métodos de análisis estructural basados en el álgebra lineal se apoyan en la ecuación de estado de la red (trabajan por tanto sobre redes puras). Para ello definen los  $P$ -invariantes como  $P$ -vectores anuladores izquierdos de la matriz de incidencia.

#### Definición 2.10 ( $P$ -invariantes)

Sea  $N = (P, T, F, W, M_0)$  una Red de Petri Marcada Pura. Entonces, a los vectores  $V : P \rightarrow \mathbb{Z}$  se les llama  $P$ -vectores.

1. Un  $P$ -vector  $I$  se llama un  $P$ -invariante de  $N$  si  $I^T \cdot C = 0$ , siendo  $0$  el vector cuyas componentes son todas nulas.
2. El soporte de un  $P$ -vector  $H \in \mathbb{Z}^P$  se define como sigue:

$$P_H = \{p \in P \mid H(p) \neq 0\}$$

3. Un  $P$ -invariante  $I$  de  $N$  se dice que es *no-negativo* si todas sus componentes son mayores o iguales que  $0$ .
4. Un  $P$ -invariante no-negativo se dice que es *minimal* si no hay otro  $P$ -invariante  $I'$  no-negativo tal que  $0 < I' < I$ .

5. Un *P-invariante positivo* (todas sus componentes son positivas o nulas, pero al menos una es estrictamente positiva) se llama un *P-semiflujo*.

□

La ecuación  $I^T \cdot C = 0$  puede ser resuelta mediante el algoritmo de Farkas (ver [MeVa86]), que proporciona un conjunto de generadores del conjunto de *P-semiflujos* soluciones. La siguiente proposición demuestra que los *P-semiflujos minimales* generan todas las soluciones de  $Y^T \cdot C = 0$ , con  $Y$  un vector con coeficientes en  $Q^+ \cup \{0\}$ .

**Proposición 2.2** Sea una Red de Petri Marcada Pura  $N = (P, T, F, W, M_0)$  y  $C$  su matriz de incidencia. Sea  $Y$  un vector con coeficientes en  $Q^+ \cup \{0\}$  tal que  $Y^T \cdot C = 0$ . Entonces,  $Y = \sum_i \lambda_i Y_i$ , siendo los  $Y_i$  *P-semiflujos minimales* de  $N$ .

**Demostración:** Ver [Esp90].

□

La siguiente propiedad de los *P-invariantes* permite resolver el problema de la conservación.

**Proposición 2.3** Sea una Red de Petri Marcada Pura  $N = (P, T, F, W, M_0)$  y sea  $I$  un *P-invariante* suyo. Entonces  $\forall M' \in [M_0], : I^T \cdot M = I^T \cdot M_0$ .

**Demostración:** Basta aplicar la definición de *P-invariante* y la ecuación de estado, multiplicando dicha ecuación por su izquierda por  $I^T$ .

□

De esta propiedad se concluye que si  $N$  es una Red de Petri Marcada Pura dotada de un *P-semiflujo*, entonces  $N$  es conservativa respecto de dicho *P-semiflujo*. Además, aunque dicha propiedad no permite resolver el problema de alcance, sí permite demostrar que un determinado marcaje no está en el alcance de la red. Es decir, un marcaje determinado  $M$  no estará en el alcance de  $N$  si  $I^T \cdot M \neq I^T \cdot M_0$ . Otra propiedad que puede ser resuelta mediante el uso de *P-semiflujos* es la seguridad, pues una consecuencia de que el número entero  $n = I^T \cdot M$  sea constante para todos los marcajes alcanzables es que todos los lugares de  $N$  asociados a componentes no nulas de  $I$  (lugares del soporte de  $I$ ) son *n-seguros*.

Lamentablemente, la propiedad anterior de invarianza de la cantidad  $I^T \cdot M$  no caracteriza plenamente a los *P-invariantes*, es decir, el recíproco no es en general

cierto. Ello se debe a la posibilidad de que en el marcaje inicial no contemos con suficientes tokens como para poner a prueba todas las transiciones del sistema. Sin embargo, si fortalecemos un poco las condiciones del marcaje de partida, conseguimos un recíproco.

**Teorema 2.4** Sea  $N = (P, T, F, W, M_0)$  una Red de Petri Marcada Pura, con  $M_0$  un marcaje que cumple la siguiente propiedad:  $\forall t \in T \exists M_t \in [M_0]$  que permite la activación de  $t$ . Sea además  $I$  un  $P$ -vector tal que  $I^T \cdot M = I^T \cdot M_0$ , para todo  $M \in [M_0]$ . Entonces  $I$  es un  $P$ -invariante de  $N$ .

**Demostración:** Para cada transición  $t$  sea el marcaje  $M_t$ . El disparo de  $t$  bajo dicho marcaje proporciona el marcaje  $M'_t$ , dado por:

$$M'_t = M_t + C(-, t)$$

Ahora bien, por la hipótesis efectuada sobre  $I$ ,  $I^T \cdot M'_t = I^T \cdot M_t$ , lo que implica:  $I^T \cdot C(-, t) = 0$ . Esto es válido para todo  $t$ , por tanto  $I^T \cdot C = 0$ .  $\square$

De forma totalmente simétrica podemos definir los  $T$ -invariantes, como anuladores derechos de la matriz de incidencia. Ellos nos permitirán resolver también algunos de los problemas planteados.

**Definición 2.11** ( $T$ -invariantes)

Sea  $N = (P, T, F, W, M_0)$  una Red de Petri Marcada Pura. Un vector de la forma  $J : T \longrightarrow \mathbb{Z}$  se llama un  $T$ -vector.

1. Se dice que un  $T$ -vector  $J$  es un  $T$ -invariante de  $N$  sii  $C \cdot J = 0$ , siendo  $C$  la matriz de incidencia de  $N$ .
2. un  $T$ -invariante de  $N$  se dice que es *no-negativo* sii todas sus componentes son mayores o iguales que 0.
3. Un  $T$ -invariante no-negativo  $J$  de  $N$  se dice que es *minimal* si no existe otro  $T$ -invariante no-negativo  $J'$  tal que  $0 < J' < J$ .

$\square$

El teorema siguiente relaciona los marcajes reproducibles (*home-states*) con los  $T$ -invariantes.

**Teorema 2.5** Sea  $N = (P, T, F, W, M_0)$  una Red de Petri Marcada Pura, y sea  $M$  un *home-state* de  $N$ . Entonces, las transiciones de cada secuencia de ocurrencia  $\sigma$  tal que  $M[\sigma]M$  constituyen el soporte de un *T-invariante* no-negativo de  $N$ .

**Demostración:** Inmediata, a partir de la ecuación de estado.  $\square$

Su recíproco es igualmente cierto, lo que transforma este teorema en una propiedad caracterizadora de los *T-invariantes*.

**Teorema 2.6** Sea  $N = (P, T, F, W, M_0)$  una Red de Petri Marcada Pura y sea  $J$  un *T-invariante* no-negativo de  $N$ . Entonces existe un marcaje  $M_J$ , reproducible con el disparo de las transiciones del soporte de  $J$ , disparadas tantas veces como indique la correspondiente componente en  $J$ .

**Demostración:** Basta considerar el marcaje  $M_J(p) = \sum_{t \in p^\bullet} J(t) \cdot W(p, t), \forall p \in P$ . Su definición es correcta, al ser  $T$  no-negativo. Basta entonces aplicar la ecuación de estado para obtener  $M_J + C \cdot J = M_J + 0 = M_J$ .  $\square$

No obstante, la ciclicidad de la red no puede ser resuelta mediante el simple uso de *T-invariantes*. De hecho, tal cosa no puede garantizarse ni siquiera aunque cada estado alcanzable sea un *home-state*.

### Análisis Estructural Basado en Cerrojos y Trampas

El otro tipo de técnicas estructurales se apoyan en los conceptos de cerrojos y trampas, que son propiedades puramente estructurales, prescindiendo del marcaje de la red en un momento dado. Los cerrojos son conjuntos de lugares, que una vez que han perdido conjuntamente sus tokens permanecen desmarcados por siempre. Simétricamente, las trampas son conjuntos de lugares que permanecen marcados una vez que tienen un token.

#### Definición 2.12 (Cerrojos y Trampas)

Sea  $N = (P, T, F, M_0)$  una Red de Petri Ordinaria Marcada Pura Fuertemente Conexa (es decir, desde cualquier nodo, ya sea transición lugar, se puede ir a cualquier otro nodo).

1.  $S \subseteq P$  se llama un *cerrojo* de  $N$  sii  ${}^\bullet S \subseteq S^\bullet$ .

2.  $S \subseteq P$  se llama una *trampa* de  $N$  sii  $S^\bullet \subseteq {}^\bullet S$ .
3. Un cerrojo (resp. trampa) se dice que es *minimal* sii no existe otro cerrojo (resp. trampa) contenido en él de forma estricta.

□

El siguiente teorema expresa la interpretación realizada de los cerrojos y trampas.

**Teorema 2.7** Sea  $N$  una Red de Petri Ordinaria Marcada Pura Fuertemente Conexa.

1. Sea  $S$  un cerrojo de  $N$ . Entonces:

$$(\forall s \in S : M(s) = 0) \Rightarrow \forall M' \in [M] : \forall s \in S : M'(s) = 0$$

Es decir, si en algún marcaje  $M$  el cerrojo se vacía, entonces en todo marcaje posterior permanece vacío.

2. Sea  $S$  una trampa de  $N$ . Entonces:

$$(\exists s \in S : M(s) > 0) \Rightarrow \forall M' \in [M] \exists s \in S : M'(s) > 0$$

Es decir, si en algún marcaje  $M$  la trampa adquiere un token, entonces en todo marcaje posterior la trampa permanece marcada.

**Demostración:** Ver [Lau86].

□

El teorema siguiente proporciona una condición suficiente para decidir la ausencia de bloqueos.

**Teorema 2.8** Sea  $N$  una Red de Petri Ordinaria en las condiciones de la definición anterior. Si todo cerrojo no vacío de  $N$  contiene una trampa marcada en  $M_0$ , entonces  $N$  no se bloquea.

**Demostración:** Ver [Lau86].

□

Sin embargo, el problema de la vivacidad tampoco puede resolverse en general con el uso de cerrojos y trampas, salvo en casos concretos, como son los grafos marcados, que son redes fuertemente conexas en las que todo lugar tiene una única transición precondition y una única transición postcondición.





## Capítulo 3

# Redes de Petri Temporizadas

En este capítulo introducimos las Redes de Petri Temporizadas, para las cuales definimos una semántica de pasos, así como dos semánticas restrictivas, la primera de ellas basada en no permitir ejecuciones solapadas de la misma transición, y la segunda basada en no permitir disparos simultáneos de varias instancias de la misma transición. También se introducen las propiedades cuya decidibilidad será objeto de estudio en los siguientes capítulos.

Existen básicamente dos extensiones temporizadas de Redes de Petri. Las Redes de Petri con Tiempo (ver [Mer74]) y las Redes de Petri Temporizadas (ver [Ram74]). Las primeras asocian dos números enteros a cada transición, que representan, respectivamente, el primer instante en el que la transición asociada puede ser disparada, y el instante en el que debe ser disparada como muy tarde (ambos con respecto al instante en el que la transición está permitida). En este tipo de redes el disparo no toma ningún tiempo. La segunda versión es la que consideramos a lo largo de la tesis, se basa en la asociación de una duración (en principio entera, aunque luego consideraremos modelos con duraciones racionales y reales) a cada transición.

### 3.1 Conceptos Generales

**Definición 3.1** (Red de Petri Temporizada)

Se define una Red de Petri Temporizada (RPT) como una quintupla  $(P, T, F, W, \delta)$ ,

donde:

$P$  : Conjunto finito de lugares

$T$  : Conjunto finito de transiciones (disjunto con  $P$ )

$F \subseteq P \times T \cup T \times P$  (Conjunto de arcos)

$W : F \longrightarrow \mathbb{N}^+$  (Peso de los arcos)

$\delta : T \longrightarrow \mathbb{N}^+$  (Duraciones)

□

Esta definición está basada en la terminología introducida en [BF86] y difiere de ésta en la introducción de duraciones enteras no nulas para las transiciones.

El modelo de tiempos considerado está basado en la existencia de un único reloj global, que coordina la evolución del sistema. Por otra parte, el espacio de tiempo considerado es discreto, lo que resulta más coherente con el funcionamiento de los ordenadores, que están controlados por un reloj discreto, que emite tics a intervalos regulares de tiempo. Así la duración de todas las acciones en el sistema es un múltiplo de este intervalo de tiempo.

La introducción de marcajes en las Redes de Petri nos permite especificar su evolución, anotando cada lugar con el número de tokens que hay sobre él en cada instante. En el caso de las Redes de Petri TempORIZADAS, el concepto de marcaje requiere considerar las duraciones de las transiciones. El efecto del disparo de estas transiciones temporizadas se formalizará de la forma siguiente: cuando se dispara una transición se sustraen de sus precondiciones los tokens correspondientes, y sólo añadimos los tokens correspondientes sobre las postcondiciones cuando la transición termine. Como consecuencia de ello, tenemos que añadir al concepto de marcaje ordinario una segunda componente, que indique qué transiciones están en ejecución, así como los tiempos que les quedan para terminar.

### Definición 3.2 (Marcajes de Redes de Petri TempORIZADAS)

Sea  $N = (P, T, F, W, \delta)$  una RPT. Un marcaje  $M$  para  $N$  es un par  $(M_1, M_2)$ , donde  $M_1 \in \mathbb{N}^P$  y  $M_2$  es un multiconjunto finito de pares en  $T \times \mathbb{N}^+$  tal que  $\forall t \in T$  y  $\forall \gamma \geq \delta(t) : M_2(t, \gamma) = 0$ .

Llamamos entonces a toda tupla  $(P, T, F, W, \delta, M)$  cuyas 5 primeras componentes forman la descripción de una RPT, y la sexta es un marcaje de la misma Red de Petri TempORIZADA Marcada (RPTM). □

Dado un marcaje  $M = (M_1, M_2)$  de una RPT, llamaremos a  $M_1$  el *marcaje actual* (donde aquí *marcaje* tiene el significado ordinario) de la red, y decimos que  $M_2$  es el *multiconjunto de transiciones pendientes*. Hemos considerado multiconjuntos de transiciones pendientes para permitir la ejecución solapada de varias transiciones, incluyendo la de varias instancias simultáneas de la misma transición. De esta forma obtenemos la máxima generalidad, pudiéndose establecer restricciones sobre la regla de disparo, cuando así se considere oportuno.

Al contrario de lo que ocurre en redes no temporizadas (nos referiremos en lo sucesivo con este nombre a las Redes de Petri ordinarias introducidas en el capítulo 2), es posible que en un instante concreto una Red de Petri Temporizada tenga un marcaje actual determinado, y en el instante siguiente este marcaje cambie, aún cuando no se haya disparado ninguna nueva transición, por efecto de la terminación de algunas transiciones que estuvieran en ejecución.

Sin embargo, si no se dispara ninguna nueva transición a partir de un cierto instante, entonces el marcaje de la red sólo sufrirá variaciones durante un período de tiempo finito, estabilizándose a partir de un instante determinado.

Podemos así definir una función *Estable* que para cada marcaje  $M = (M_1, M_2)$  nos indique el tiempo necesario para la estabilización, supuesto que no se dispare mientras tanto ninguna nueva transición.

### Definición 3.3 (Función de estabilización)

Sea  $N = (P, T, F, W, \delta)$  una RPT y sea  $\mathcal{M}$  su conjunto de marcajes. Se define la función *Estable* :  $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{N}$  de la forma siguiente:

$$Estable(M) \doteq Max \{ \beta \in \mathbb{N}^+ \mid \exists t \in T : M_2(t, \beta) > 0 \}$$

donde *Max* es la función que retorna el máximo de un conjunto de naturales, con el convenio habitual de devolver 0 cuando el conjunto es vacío.  $\square$

Parece razonable exigir que todo marcaje inicial esté estabilizado. Por ello, decimos que un marcaje  $M_0$  puede ser inicial cuando  $Estable(M_0) = 0$ .

**Ejemplo 3.1** La figura 4 nos muestra un ejemplo de Red de Petri Temporizada, en la que los números que acompañan a las transiciones indican sus duraciones enteras.  $\square$

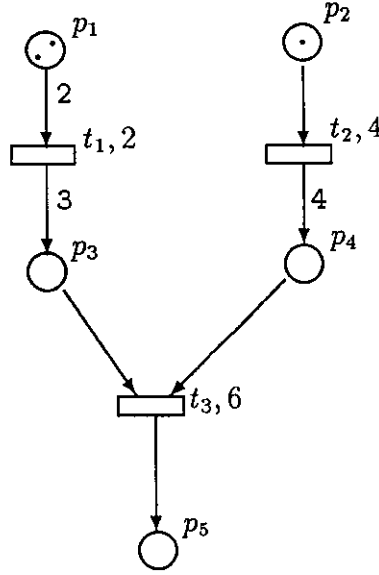


Figura 4: Ejemplo de Red de Petri Temporalizada

Como ocurre en las Redes de Petri No Temporalizadas, la evolución del sistema se especifica en términos de disparos de transiciones. En este caso, la activación de multiconjuntos de transiciones tiene lugar de acuerdo a la siguiente regla de activación.

**Definición 3.4** (Regla de Disparo)

Sea  $N = (P, T, F, W, \delta)$  una RPT y  $M = (M_1, M_2)$  un marcaje de ésta en un instante  $\beta \in \mathbb{N}$ . Un multiconjunto de transiciones  $R$  se dice que **está permitido en el instante  $\beta$**  bajo el marcaje  $M$  sii

$$M_1(p) \geq \sum_{t \in T} R(t) \cdot W(p, t), \quad \forall p \in P$$

Si un multiconjunto de transiciones  $R$  está permitido en un instante  $\beta \in \mathbb{N}$  bajo un marcaje  $M$ , y lo disparamos en ese instante, el marcaje alcanzado en el instante  $\beta + 1$  es el marcaje  $M' = (M'_1, M'_2)$  definido de la forma siguiente:

$$M'_1 = M_1 - \sum_{t \in C_0} R(t) \cdot W(-, t) + \sum_{t \in C_1} R(t) \cdot W(t, -) + \sum_{(t, 1) \in C_2} M_2(t, 1) \cdot W(t, -)$$

donde:  $C_0 \doteq \{t \in T \mid R(t) > 0\}$

$C_1 \doteq \{t \in T \mid R(t) > 0 \wedge \delta(t) = 1\}$

$C_2 \doteq \{(t, 1) \in T \times \mathbb{N} \mid M_2(t, 1) > 0\}$

$M'_2 : T \times \mathbb{N}^+ \longrightarrow \mathbb{N}$  con

$$M'_2(t, \beta') \doteq \begin{cases} R(t) & \text{si } \beta' = \delta(t) - 1 \\ M_2(t, \beta' + 1) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Es inmediato comprobar que  $M'$  cumple las condiciones para ser un marcaje. El paso descrito se denota con la notación usual:  $M[R]M'$ .  $\square$

De esta forma, el marcaje actual alcanzado correspondiente al instante  $\beta + 1$  se obtiene sustrayendo al marcaje actual  $M_1$  los tokens correspondientes a los lugares de entrada de las transiciones en  $R$ , y añadiendo los correspondientes tokens sobre los lugares de salida de las transiciones en  $R$  con duración 1 y de aquellas transiciones pendientes en  $M_2$  que terminan en ese momento. En lo que concierne a  $M'_2$ , éste refleja el paso del tiempo, de modo que incluye aquellos elementos en  $M_2$  a los que les queda más de una unidad de tiempo para terminar decrementados en una unidad, y también incluye las transiciones de  $R$  con duración mayor que una unidad de tiempo, anotadas con el tiempo que les queda para concluir  $\delta(t) - 1$ .

Un caso particular de la definición anterior ocurre cuando  $R$  es vacío. En tal caso, los cambios en el marcaje reflejan el paso de una unidad de tiempo para cada transición pendiente.

De esta definición se deduce que, de forma análoga a lo que ocurre en redes no temporizadas, si un multiconjunto de transiciones  $R$  está permitido en un instante  $\beta$ , entonces también está permitido en todo instante posterior, al menos mientras no se disparen nuevas transiciones. Ello se debe a que el efecto del paso del tiempo sólo puede ser positivo, en el sentido de que el marcaje actual sólo puede ganar nuevos tokens, cada vez que la ejecución de una transición pendiente termina.

En el ejemplo 3.1 puede dispararse el conjunto  $\{t_1, t_2\}$  de forma simultánea en cualquier instante de tiempo. Supongamos, por ejemplo, que se dispara en el instante 0. Entonces, en el instante 1 el marcaje de la red sería  $M_1 = (M_{1,1}, M_{1,2})$ , con  $M_{1,1} = (0, 0, 0, 0, 0)$  y  $M_{1,2} = \{1.(t_1, 1), 1.(t_2, 3)\}$ . Esto significa que los tokens correspondientes a las postcondiciones no se han añadido aún a sus lugares correspondientes, y que tenemos una copia de la transición  $t_1$  a la que queda una unidad de tiempo para terminar y una copia de  $t_2$  a la que quedan tres unidades de tiempo para terminar. En el instante 2 tendremos el siguiente marcaje:  $M_2 = (M_{2,1}, M_{2,2})$ , con  $M_{2,1} = (0, 0, 3, 0, 0)$  y  $M_{2,2} = \{1.(t_2, 2)\}$ . Es decir, la transición  $t_1$  ha terminado

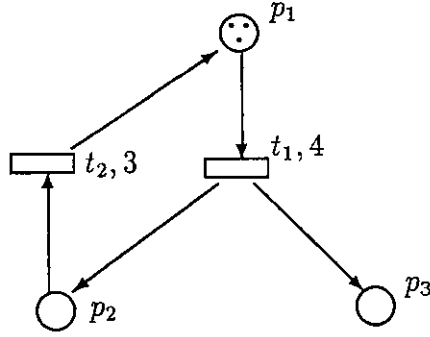


Figura 5: Ejemplo de Red de Petri Temporalizada

ya su ejecución, y por tanto, han sido añadidos los correspondientes tokens sobre los lugares postcondición. En el instante 4 terminará la ejecución de  $t_2$ , llegándose a un marcaje estable, el cual permite además el disparo de la transición  $t_3$ .

En este ejemplo no hemos solapado la ejecución de varias copias de la misma transición. Consideremos ahora el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 3.2** Sea la Red de Petri de la figura 5. En este segundo ejemplo podemos disparar en el instante inicial dos copias de  $t_1$ , obteniendo así en el instante 1 el siguiente marcaje:  $M_1 = (M_{1,1}, M_{1,2})$ , con  $M_{1,1} = (1, 0, 0)$  y  $M_{1,2} = \{2.(t_1, 3)\}$ . En el instante 2, por ejemplo, podemos disparar otra copia de  $t_1$ , obteniendo en el instante 3 el marcaje siguiente:  $M_3 = (M_{3,1}, M_{3,2})$ , con  $M_{3,1} = (0, 0, 0)$ , y  $M_{3,2} = \{2.(t_1, 1), 1.(t_1, 3)\}$ . En el siguiente instante terminarán las dos primeras copias de  $t_1$ , lo que permitirá el disparo de  $t_2$ .  $\square$

La definición de la regla de disparo nos va a permitir asociar a las Redes de Petri Temporalizadas una semántica de pasos. No obstante, si limitamos la regla de disparo permitiendo únicamente el disparo de una transición en cada instante, obtendremos una semántica de secuencias de ocurrencia. Otras dos semánticas restrictivas son también de interés para nosotros, basadas en prohibir la ejecución solapada de varias instancias de la misma transición y en prohibir el disparo simultáneo de varias instancias de la misma transición, respectivamente.

**Definición 3.5** (Secuencias de Pasos Temporalizadas)

Sea  $N = (P, T, F, W, \delta)$  una RPT y sea  $M_0$  un marcaje inicial de ésta; se dice que

$\sigma = M_0[R_0] \dots M_{n-1}[R_{n-1}]M_n$  es una secuencia de pasos temporizada finita de  $(N, M_0)$  sii:

1.  $\forall i \in \{0, \dots, n-1\} : R_i$  es un multiconjunto de transiciones en  $T$  (que puede ser vacío)
2.  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : M_{i-1}[R_{i-1}]M_i$ , siendo  $M_{i-1}$  y  $M_i$  marcajes de  $N$ .

A partir del marcaje inicial  $M_0$ , la duración de la secuencia y los pasos  $R_i$  no vacíos con sus tiempos de disparo podemos reconstruir toda la secuencia de pasos. Por tanto, habitualmente escribiremos  $M[\sigma^{(n)}]M_n$ , donde  $\sigma = R_1^{(\beta_1)} \dots R_r^{(\beta_r)}$ , con  $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_r$ , y cada  $R_j$  es un multiconjunto no vacío de transiciones en  $T$ .

Denotamos por  $P(N, M_0)$  al conjunto de secuencias de pasos temporizadas, que define la semántica de pasos de  $N$ . Es decir:

$$P(N, M_0) = \{\sigma \mid \sigma \text{ es secuencia de pasos temporizados finita para } N \text{ desde } M_0\}$$

□

Las dos semánticas restrictivas citadas se obtienen de la forma siguiente:

**Definición 3.6** (Reglas de Disparo Restrictivas)

Sea  $N = (P, T, F, W, \delta)$  una RPT y  $M = (M_1, M_2)$  un marcaje de la misma.

- Se dice que un multiconjunto de transiciones  $R$  *está permitido sin solapamiento de ejecuciones de la misma transición (ss-permitido)* bajo el marcaje  $M$  si y sólo si está permitido sin restricciones, y  $\forall t \in T$  se tiene:

1. Si  $\exists \gamma \in \mathbb{N}, M_2(t, \gamma) > 0$  entonces  $R(t) = 0$
2.  $R(t) \leq 1$

- Se dice que un multiconjunto de transiciones  $R$  *está permitido sin el disparo simultáneo de varias instancias de la misma transición (sds-permitido)* bajo el marcaje  $M$  si y sólo si está permitido sin restricciones, y  $\forall t \in T$  se tiene  $R(t) \leq 1$ .

□



**Definición 3.7** (Secuencias de Pasos TempORIZADAS Restrictivas)

Sea  $N = (P, T, F, W, \delta)$  una RPT,  $M_0$  un marcaje inicial de  $N$  y  $\sigma = M_0[R_0] \dots M_{n-1}[R_{n-1}]M_n$  una secuencia de pasos temporizada de  $N$ .

- Se dice que  $\sigma$  es una *secuencia de ocurrencia temporizada* si y sólo si todo paso no vacío consta únicamente de una transición, es decir

$$\forall i \in \{0, \dots, n-1\} \quad |R_i| \leq 1$$

- Se dice que  $\sigma$  es una *secuencia de pasos temporizada ss-finita* de  $(N, M_0)$  si y sólo si todos los pasos en ella están ss-permitidos sobre los correspondientes marcajes de partida.
- Se dice  $\sigma$  es una *secuencia de pasos temporizada sds-finita* de  $(N, M_0)$  si y sólo si todos los pasos en ella están sds-permitidos sobre los correspondientes marcajes de partida.

□

**Definición 3.8** (Semánticas de Pasos TempORIZADAS Restrictivas)

Sea  $N = (P, T, F, W, \delta)$  una RPT y  $M_0$  un marcaje inicial de ésta.

- Se define el conjunto de las *secuencias de ocurrencia temporizadas finitas* de  $N$  a partir de  $M_0$ , que define su *semántica de secuencias de ocurrencia temporizadas* de la forma siguiente:

$$L(N, M_0) = \{\sigma \in P(N, M_0) \mid \sigma \text{ es secuencia de ocurrencia temporizada finita}\}$$

- Se define el conjunto de las *secuencias de pasos temporizadas ss-finitas* de  $N$  a partir de  $M_0$ , que define su *semántica de secuencias de pasos temporizadas ss-finitas* de la forma siguiente:

$$S(N, M_0) = \{\sigma \in P(N, M_0) \mid \sigma \text{ es secuencia de pasos temporizada ss-finita}\}$$

- Se define el conjunto de las *secuencias de pasos temporizadas sds-finitas* de  $N$  a partir de  $M_0$ , que define su *semántica de secuencias de pasos temporizadas sds-finitas* de la forma siguiente:

$$D(N, M_0) = \{\sigma \in P(N, M_0) \mid \sigma \text{ es secuencia de pasos temporizada sds-finita}\}$$

□

**Proposición 3.1** Las Redes de Petri Temporizadas tales que todas sus transiciones tienen una duración igual a una unidad de tiempo son equivalentes, bajo la semántica de secuencias de ocurrencia introducida, a la misma red sin tiempos, con la semántica de secuencias de ocurrencia (ordinaria). También son equivalentes, bajo la semántica de secuencias de pasos temporizadas a la misma red sin tiempos con su semántica de pasos ordinaria.

**Demostración:** Es inmediata, pues al tener todas las transiciones duración 1, las estabilizaciones ocurren de forma inmediata. □

## 3.2 Análisis de Problemas para RPT

### 3.2.1 Problema de Alcance

El problema de alcance para una Red de Petri Temporizada  $N$  consiste en decidir si un marcaje dado  $M$  es alcanzable en  $N$ . También vamos a considerar el Problema de Alcance Estricto, que está definido tomando como entrada no sólo el marcaje  $M$ , sino también el instante en el que debemos alcanzarlo.

**Definición 3.9** (Problema de Alcance para Redes de Petri Temporizadas)

Sea  $N = (P, T, F, W, \delta, M_0)$  una RPTM y  $M$  un marcaje de ésta. Se dice que  $M$  es alcanzable en  $N$ , lo que se denotará por  $M \in [M_0]$ , si existe un  $\beta \in \mathbb{N}$  y una secuencia de pasos temporizada finita  $\sigma$  tal que  $M_0[\sigma^{(\beta)}]M$ . □

Puesto que no imponemos ninguna restricción sobre el instante en el que debemos alcanzar el marcaje  $M$ , es relativamente fácil concluir que este problema es decidible, ya que podemos ver que si algún marcaje es alcanzable, éste también puede ser alcanzado por una secuencia de pasos temporizada sin ejecuciones solapadas de transiciones. Estas secuencias pueden ser simuladas por secuencias de ocurrencia ordinarias de la Red de Petri No Temporizada asociada; y recíprocamente. Así, el problema se reduce al Problema de Alcance para Redes de Petri No-Temporizadas, el cual es decidible (véase [Kos82, Lam86, May81]).

**Teorema 3.1** (Decidibilidad del Problema de Alcance para Redes de Petri Temporizadas) Sea  $N = (P, T, F, W, \delta, M_0)$  una RPTM y  $M$  un marcaje de ésta. Podemos decidir si  $M \in [M_0]$ .

**Demostración:** Debemos distinguir dos casos:

1. Si  $M$  es estable, entonces  $M$  es alcanzable en  $N$  con respecto a la semántica de pasos temporizada sii es alcanzable en la red no temporizada asociada a  $N$ , lo que se obtiene ignorando las duraciones de las transiciones.

Ello se debe a que siempre podemos disparar las transiciones de forma más lenta, obteniendo en particular una secuencia equivalente sin ejecuciones solapadas de transiciones.

2. Si  $M$  no es estable, consideramos el marcaje estable  $M'$  obtenido añadiendo al marcaje  $M$  los tokens sustraídos por los disparos de las transiciones que están en ejecución en  $M$ . Entonces, si  $M$  es alcanzable,  $M'$  también será alcanzable, ya que si tomamos la secuencia de pasos que nos conduce a  $M$ , y omitimos la ejecución de las transiciones en ejecución en  $M$ , obtenemos una secuencia de pasos que nos conduce a  $M'$ . Resulta obvio que en  $M'$  podemos disparar (incluso juntas) todas esas transiciones, y en particular podemos dispararlas de la forma adecuada para alcanzar  $M$ . Así, si  $M'$  es alcanzable,  $M$  lo será también.

□

**Definición 3.10** (Problema de Alcance Estricto para Redes de Petri Temporizadas) Sea  $N = (P, T, F, W, \delta, M_0)$  una RPTM,  $M$  un marcaje de ésta, y  $\beta \in \mathbb{N}$ . Decimos que  $M$  es alcanzable en  $N$  en el instante  $\beta$ , lo que se denotará por  $M \in [M_0]_\beta$ , sii existe una secuencia de pasos  $\sigma$  tal que  $M_0[\sigma^{(\beta)}]M$ . □

La interpretación del problema de alcance estricto es obvia, se trata de ver si un sistema puede alcanzar un cierto estado en un plazo de tiempo limitado.

Cuando la Red de Petri Temporizada considerada no contiene transiciones autónomas, es decir, cuando no hay ninguna transición sin precondiciones, el Problema de Alcance Estricto es trivialmente decidible, ya que podemos enumerar de forma finita los marcajes alcanzables en el instante  $\beta$ . Ello se debe a que en

cualquier instante sólo podemos disparar un número finito de multiconjuntos de transiciones.

**Teorema 3.2** (Decidibilidad del Problema de Alcance Estricto para Redes de Petri Temporizadas sin transiciones autónomas) Sea  $N = (P, T, F, W, \delta, M_0)$  una RPTM tal que  $\forall t \in T : {}^*t \neq \emptyset$ . Sea  $M$  un marcaje para ésta, y  $\beta \in \mathbb{N}$ . Podemos decidir si  $M \in [M_0]_\beta$ .  $\square$

Posteriormente demostraremos, usando una codificación de las RPT mediante Redes de Petri No Temporizadas, que el Problema de Alcance Estricto es también decidible para Redes de Petri Temporizadas con transiciones autónomas.

### 3.2.2 Otros problemas relacionados

Los siguientes problemas pueden ser planteados sobre Redes de Petri Temporizadas, y pueden ser resueltos (probando la decidibilidad de las propiedades asociadas) mediante la codificación que presentaremos en la Sección 4.

**Definición 3.11** Sea  $N = (P, T, F, W, \delta, M_0)$  una RPTM,  $s \in P$  y  $k \in \mathbb{N}$ .

1. Decimos que  $N$  es *s, k-ilimitada linealmente* sii existe algún  $\beta \geq k$ , y algún marcaje  $M$  tal que  $M \in [M_0]_\beta$  y  $M_1(s) \geq \beta$ .
2. Decimos que  $N$  es *s-ilimitada uniformemente* sii para todo  $\beta \in \mathbb{N}$  y para todo  $M \in [M_0]_\beta$  existe algún  $\gamma \in \mathbb{N}$  y algún marcaje  $M' \in [M]_\gamma$  tal que  $M'_1(s) \geq \gamma + \beta$ .

$\square$

No es fácil dar una interpretación a estas propiedades, que hemos definido como extensiones temporizadas de la noción de ilimitación. En la *s, k-ilimitación lineal* estudiamos si el lugar  $s$  puede llegar a tener en algún instante  $\beta$  mayor que  $k$ , un número de tokens igual o mayor que  $\beta$ . Con ello queremos capturar la idea de que es posible hacer crecer al menos una vez el número de tokens sobre el lugar en cuestión de forma (al menos) lineal, durante un intervalo de tiempo de duración mayor o igual a  $\beta$ . Por contra, en la *s-ilimitación uniforme* miramos si el lugar  $s$  puede llegar desde cualquier marcaje alcanzable a ganar tokens a mayor velocidad

que el paso del tiempo. Exigimos pues que se cumpla la propiedad anterior para algún período de tiempo  $\gamma$ , pero no sólo a partir del marcaje inicial, sino también a partir de cada marcaje alcanzable. A ello nos referimos cuando hablamos de uniformidad.

**Definición 3.12** ( $\beta$ -vivacidad)

Sea  $N = (P, T, F, W, \delta, M_0)$  una RPTM,  $\beta \in \mathbb{N}$  y  $t \in T$ . Decimos que  $t$  es  $\beta$ -viva sii para cualquier marcaje alcanzable  $M$  existe un marcaje  $M' \in [M]_\beta$  que permite el disparo de la transición  $t$ .

Decimos que  $N$  es  $\beta$ -viva sii todas sus transiciones son  $\beta$ -vivas.  $\square$

La noción de  $\beta$ -vivacidad de una transición  $t$  extiende de manera natural la de vivacidad a Redes Temporalizadas. Si en aquel caso exigíamos que desde cada marcaje alcanzable fuese posible volver a disparar la transición  $t$ , ahora exigimos lo mismo, pero limitando a  $\beta$  unidades el tiempo que tenemos para lograrlo.

**Definición 3.13** (Ausencia de  $\beta$ -bloqueos)

Sea  $N = (P, T, F, W, \delta, M_0)$  una RPTM, y  $\beta \in \mathbb{N}$ . Decimos que un marcaje estable  $M$  de  $N$  es *muerto* sii no hay ninguna transición permitida bajo  $M$ . Decimos que  $N$  puede  $\beta$ -bloquearse sii existe algún marcaje muerto  $M' \in [M_0]_\beta$ .  $\square$

La interpretación de esta propiedad es obvia, se estudia si la red puede bloquearse en un tiempo menor o igual a  $\beta$ .

También podríamos considerar las nociones usuales de vivacidad y ausencia de bloqueos sobre Redes de Petri Temporalizadas, sin introducir en las mismas modificación alguna. Pero como ya sucedió en la noción de accesibilidad, tendríamos que la temporización de la red no afectaría en absoluto al hecho de que se cumpliesen o no dichas propiedades. Resultaría en particular de forma trivial, que también sobre Redes Temporalizadas, ambas propiedades son decidibles (sin más que olvidarnos de la temporización, y estudiarlas tras ello).

## Capítulo 4

# Simulación de RPT's con Redes sin Tiempos

Veremos en este capítulo que, con vistas a estudiar el problema de accesibilidad estricto, junto con el resto de las propiedades presentadas en el capítulo anterior, es posible simular las Redes Temporizadas por medio de Redes Ordinarias con su semántica usual.

La idea clave para obtener esta simulación se basa en dividir cada transición en otras transiciones de duración 1, y aplicar la proposición 3.1. A fin de facilitar la comprensión de la misma, la construcción se realiza de una forma gradual. Comenzamos con una construcción que permite simular la semántica de secuencias de pasos temporizadas ss-finitas de la Red Temporizada dada. En un segundo paso, modificamos la construcción para cubrir la semántica de secuencias de pasos temporizadas sds-finitas. Finalmente, se presenta una construcción general que cubre la regla de disparo general, para Redes de Petri Temporizadas. Hemos de hacer notar, sin embargo, que si bien hemos presentado las construcciones parciales anteriores a fin de facilitar la comprensión de esta construcción final, la misma exige una aproximación un tanto diferente a la que nos conduce a las anteriores, pues mientras que no permitimos el disparo simultáneo de varias instancias de una misma transición, está limitada la capacidad de memoria que precisamos para “recordar” las transiciones que en cada momento tenemos pendientes de terminación, desapareciendo dicha limitación al eliminarse la citada restricción.

Un hecho importante para comprender las construcciones que presentamos, es

que en las mismas no se representa el paso del tiempo mediante una transición especial, sino que contamos con un reloj implícito, representado por el número de tokens sobre un lugar distinguido. Cada token añadido a este lugar representa el paso de una unidad de tiempo (es decir, la ejecución de un paso) en la Red Temporizada original.

En la bibliografía que hemos podido consultar, sólo hemos encontrado un esquema de codificación de Redes de Petri Temporizadas mediante Redes No Temporizadas [And86]. Dicha codificación (ver capítulo 10) se basa, en línea con la alternativa por nosotros descartada, en la presencia de una transición que genera ticks periódicamente, de modo que el disparo de cada transición de la red construida debe sincronizarse con el disparo de dicha transición. Este esquema de codificación da lugar a una extraordinaria complejidad a la hora de modelizar las sincronizaciones. Además, dicha construcción sólo es válida para la semántica de secuencias de pasos temporizadas ss-finitas; es decir, no se permite la ejecución solapada de varias instancias de una misma transición, con la consiguiente simplificación conceptual que ello conlleva.

## 4.1 Codificación de los Autómatas de Estados Finitos

Comenzamos recordando una definición extraída de [Pet81] que nos permite modelar todo autómatas de estados finitos mediante una Red de Petri Ordinaria.

**Definición 4.1** (Red de Petri que Modela un Autómatas de Estados Finitos)

Sea  $\mathcal{A} = (Q', \Sigma', \Theta', \delta', \Gamma', q_0)$  un autómatas de estados finitos, siendo

$Q'$  : Conjunto finito de estados

$\Sigma'$  : Alfabeto de entrada

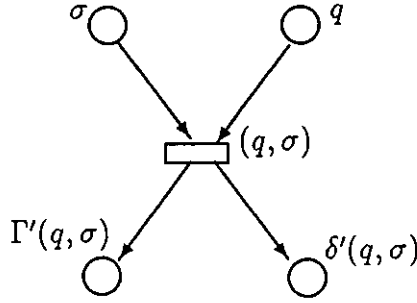
$\Theta'$  : Alfabeto de salida

$\delta'$  : Función de transición de estados :  $\delta' : Q' \times \Sigma' \longrightarrow Q'$

$\Gamma'$  : Función de salida :  $\Gamma' : Q' \times \Sigma' \longrightarrow \Theta'$

$q_0$  : Estado inicial,  $q_0 \in Q'$

verificando que  $Q'$ ,  $\Sigma'$  y  $\Theta'$  son disjuntos entre sí. Entonces definimos la Red de Petri Ordinaria  $N(\mathcal{A}) = (P, T, F, W, M_0)$  que modela la conducta de  $\mathcal{A}$  de la forma

Figura 6: Construcción de  $N(\mathcal{A})$ 

siguiente:

$$\begin{aligned}
 P &= Q' \cup \Sigma' \cup \Theta' \\
 T &= \{(q, \sigma) \mid q \in Q' \wedge \sigma \in \Sigma'\} \\
 F &= \{(q, t) \mid q \in Q' \wedge t = (q, \sigma) \in T\} \cup \\
 &\quad \{(\sigma, t) \mid \sigma \in \Sigma' \wedge t = (q, \sigma) \in T\} \cup \\
 &\quad \{(t, q') \mid q' = \delta'(q, \sigma) \in Q' \wedge t = (q, \sigma) \in T\} \cup \\
 &\quad \{(t, \theta) \mid t = (q, \sigma) \in T \wedge \theta = \Gamma'(q, \sigma) \in \Theta'\} \\
 W(f) &= 1, \forall f \in F \\
 M_0(p) &= \begin{cases} 1 & \text{si } p = q_0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}
 \end{aligned}$$

□

La construcción está ilustrada en la figura 6.

Comenzamos entonces con la construcción para el caso en el que no permitimos que una misma transición tenga varias ejecuciones solapadas.

## 4.2 Caso 1: Semántica de Secuencias ss-finitas

La construcción se basa en controlar el funcionamiento de la red a través de un autómata de estados finitos, cuyos estados nos indican si tenemos transiciones a medio ejecutar, y en caso afirmativo, el tiempo que les queda a cada una de ellas para terminar.



**Definición 4.2** (Red de Petri No Temporizada asociada a una RPT)

Sea  $N = (P, T, F, W, \delta, M_0)$  una RPTM. La *Red de Petri No Temporizada asociada a  $N$*  es la red  $N'' = (P'', T'', F'', W'', M_0'')$  obtenida aplicando la siguiente construcción:

En primer lugar se define el autómata  $\mathcal{A} = (Q', \Sigma', \Theta', \delta', \Gamma', q_0)$  que controla la evolución de  $N$  de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} Q' &= \{(q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{N}^n \mid n = |T| \wedge q_j \in \{0, 1, \dots, \delta(t_j) - 1\}\} \\ q_0 &= (0, \dots, 0) \\ \Sigma' &= \{(A, in) \mid A \in \mathcal{P}(T)\} \\ \Theta' &= \{(out, A) \mid A \in \mathcal{P}(T)\} \\ \delta' : Q' \times \Sigma' &\longrightarrow Q' \text{ y } \Gamma' : Q' \times \Sigma' \longrightarrow \Theta', \text{ definidas como sigue:} \\ (i) \delta'(q, (A, in)) &\text{ está definida sii } \forall t_j \in A, q_j = 0. \\ \text{En tal caso: } \delta'(q, (A, in)) &\doteq q', \text{ donde:} \end{aligned}$$

$$q'_i \doteq \begin{cases} q_i \dot{-} 1 & \text{si } t_i \notin A \\ \delta(t_i) - 1 & \text{si } t_i \in A \end{cases}$$

donde  $\dot{-}$  representa la sustracción corregida, definida como sigue:

$$x \dot{-} y = \text{Máx}\{0, x - y\}$$

(ii)  $\Gamma'(q, (A, in)) \doteq (out, C)$ , donde

$$\begin{aligned} C = \{ & (t_j \in T \mid q' = \delta(q, (A, in)) \wedge ((q_j > 0 \wedge q'_j = 0) \vee \\ & (q_j = 0 \wedge t_j \in A \wedge \delta(t_j) = 1))) \} \end{aligned}$$

Los estados de este autómata nos servirán para representar las transiciones en ejecución en los marcajes de la Red Temporizada original. Cada componente de un estado nos dice si hay alguna instancia pendiente de cada transición, y en tal caso, cuál es el tiempo que le queda para concluir su ejecución. En particular, el estado inicial corresponde a cualquier marcaje estable. Las entradas del autómata representan los pasos que serán ejecutados en cada instante de tiempo, mientras que las salidas indican los conjuntos de transiciones que terminan en cada instante. En particular, el conjunto vacío en  $\Sigma'$  corresponde al paso del tiempo, es decir, a pasos vacíos. Finalmente, las funciones  $\delta'$  y  $\Gamma'$  codifican la regla de disparo de la Red Temporizada original.

Sea  $N(\mathcal{A}) = (P', T', F', W', M'_0)$  la Red de Petri Ordinaria que modela el autómata que acabamos de definir. Definimos la Red  $N'' = (P'', T'', F'', W'', M''_0)$  que representa (bajo la restricción actual) a la Red de Petri Temporizada original de la forma siguiente:

$$P'' = P \cup Q' \cup \{reloj\}$$

$$T'' = T'$$

$$F'' = F''_1 \cup F''_2, \text{ donde:}$$

$$F''_1 = \{f' \in F' \mid f' = (q', t') \vee f' = (t', q'), \text{ donde } q' \in Q', t' \in T'\}$$

$$F''_2 = \{(p, t') \mid p \in P \wedge t' \in T' \wedge t' = (q', (A, in)) \wedge t \in A \wedge t \in p^\bullet\} \cup \\ \{(t', p) \mid p \in P \wedge t' \in T' \wedge (t', (out, A)) \in F' \wedge p \in t^\bullet \wedge t \in A\} \cup \\ \{(t', reloj) \mid t' \in T'\}$$

$$W''(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } f = (t', reloj) \vee f \in F''_1 \\ \sum_{t_j \in A \cap p^\bullet} W(p, t_j) & \text{si } f = (p, t') \in F''_2 \wedge t' = (q', (A, in)) \\ \sum_{t \in T_A} W(t, p) & \text{si } f = (t', p) \in F''_2, \text{ donde } T_A = \{t \in A \mid p \in t^\bullet\} \\ & \text{con } (t', (out, A)) \in F' \end{cases}$$

$$M''_0(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p = reloj \\ 1 & \text{si } p \text{ corresponde al estado inicial del autómata} \\ M_0(p) & \text{si } p \in P \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

□

En esta red hemos integrado la red de partida  $N$  con la red  $N(\mathcal{A})$ , de la forma siguiente: como lugares hemos considerado los lugares de  $N$ , los lugares de  $N(\mathcal{A})$  correspondientes a estados del autómata simulado por la misma y un lugar especial, *reloj*, cuyo número de tokens representará el tiempo transcurrido. Las transiciones de  $T$  se han suprimido, de forma que la evolución de  $N$  se simula por pasos, que vienen modelados en forma de transiciones de  $N(\mathcal{A})$ . Los arcos de  $F''_1$  son los arcos de  $N(\mathcal{A})$  que conservaremos, que son aquellos que conectan una transición con un lugar que representa un estado. En  $F''_2$  añadimos arcos para conectar los lugares de la red de partida con las transiciones de  $N(\mathcal{A})$ , así como arcos hacia el reloj desde cada transición de la red. Los primeros sirven para hacer jugar a los lugares de  $P$  el papel de entradas y salidas de las transiciones de  $T'$ : para cada arco  $(p, t)$  en la red de partida incluimos en  $N''$  todos los arcos posibles  $(p, t')$ , para toda

$t' \in N(\mathcal{A})$  que incluya en su conjunto de transiciones asociado a la transición  $t$ ; análogamente, para cada arco  $(t, p)$  de la red de partida incluimos en  $N''$  todos los arcos posibles  $(t', p)$ , para toda  $t' \in N(\mathcal{A})$  tal que estaba conectada en  $N(\mathcal{A})$  con un lugar  $(out, A)$ , con  $t \in A$ . Estos últimos arcos son los que nos permiten añadir a los lugares postcondición de las transiciones los correspondientes tokens, una vez terminada la ejecución de las mismas.

En lo que respecta a los pesos, dado que hemos fundido en una sola transición todo un conjunto de transiciones de la red de partida, a cada arco  $(p, t')$ , con  $p \in P$  y  $t' = (q', (A, in))$ , le hemos de asociar la suma de todos los pesos  $W(p, t_j)$ , para todas las transiciones  $t_j$  de la red de partida tales que  $p$  estaba conectado con  $t_j$  en dicha red de partida y  $t_j \in A$ . Por el mismo motivo, a los arcos de la forma  $(t', p)$ , con  $p \in P$  y  $(t', (out, A)) \in F'$  les asociamos la suma de los pesos de los arcos  $(t, p)$ , para las transiciones  $t$  de la red de partida conectadas con  $p$  con un arco  $(t, p)$  tales que  $t \in A$ .

Para cada  $\beta \in \mathbb{N}$  podemos establecer una relación biyectiva entre los marcajes de  $N$  y los marcajes de la red asociada  $N''$  que cumplen la restricción de que sólo hay un lugar marcado en el conjunto  $P'$  y que tienen  $\beta$  tokens en el lugar *reloj*.

**Definición 4.3** Sea  $N$  una RPTM y sea  $N''$  la Red de Petri No Temporizada asociada. Denotamos por  $\mathcal{M}$  al conjunto de marcajes de  $N$  y por  $\mathcal{M}''$  al conjunto de marcajes de  $N''$ . Para todo marcaje  $M = (M_1, M_2)$  en  $\mathcal{M}$  sea  $\mathcal{S}(M) = (q_1, \dots, q_n)$  el estado asociado en  $Q'$ , que está definido de la forma siguiente:

$$q_j = \begin{cases} 0 & \text{si } \nexists \gamma \text{ tal que } M_2(t_j, \gamma) > 0 \\ \gamma & \text{si } \exists \gamma \text{ tal que } M_2(t_j, \gamma) > 0 \end{cases}$$

Este estado captura las transiciones que se encuentran en ejecución con el marcaje  $M$ . Está definido correctamente, ya que sólo puede haber un  $\gamma$  verificando la propiedad impuesta, debido a la restricción actual de no permitir varias ejecuciones solapadas de cada transición.

Se define entonces la *función de correspondencia de marcajes*  $\varphi_N^\beta : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}''$  asociada a  $N$  para un instante  $\beta$  de la forma siguiente:

$$\varphi_N^\beta(M)(p) = \begin{cases} \beta & \text{si } p = \text{reloj} \\ 1 & \text{si } p = \mathcal{S}(M) \\ M_1(p) & \text{si } p \in P \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

□

Esta función relaciona los marcajes de ambas redes, y a través de ella podremos ver que la red  $N''$  así construida simula correctamente la evolución de la red  $N$ .

**Teorema 4.1** Sea  $N = (P, T, F, W, \delta, M_0)$  una RPTM y sea  $N'' = (P'', T'', F'', W'', M_0'')$  la Red No Temporizada asociada. Entonces, para dos marcajes cualesquiera en  $N$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ , y para cualquier conjunto de transiciones  $R \subseteq T$  se tiene:

$$M_1[R]M_2 \text{ si y sólo si } \varphi_N^\beta(M_1)[(S(M_1), (R, in))] \varphi_N^{\beta+1}(M_2) \quad \forall \beta \in \mathbb{N}$$

**Demostración:** Sea  $M_1 = (M_{1,1}, M_{1,2})$ . Si  $M_1[R]M_2$ , entonces para todo  $p \in P$  se tiene:  $M_{1,1}(p) \geq \sum_{t \in R} W(p, t)$ . El marcaje  $\varphi_N^\beta(M_1)$  tiene la siguiente forma:

$$\varphi_N^\beta(M_1)(p) = \begin{cases} \beta & \text{si } p = \text{reloj} \\ 1 & \text{si } p = \mathcal{S}(M_1) \\ M_{1,1}(p) & \text{si } p \in P \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Entonces, la transición  $t' = (S(M_1), (R, in))$  está permitida en  $N'$  bajo  $\varphi_N^\beta(M_1)$ . Tras su disparo obtenemos un marcaje  $M_2''$ , que coincide con  $\varphi_N^{\beta+1}(M_2)$ , según demostramos a continuación:

En principio, dado que toda transición de  $N''$  es precondition de *reloj*, es claro que  $M_2''(\text{reloj}) = \varphi_N^\beta(M_1)(\text{reloj}) + 1 = \beta + 1 = \varphi_N^{\beta+1}(M_2)$ .

Para  $p \in P$  se obtiene:  $M_2''(p) = M_{1,1}(p) - \sum_{t \in R} W(p, t) + \sum_{t \in T_A} W(t, p)$ , siendo  $A$  el conjunto de transiciones que terminan en el instante  $\beta + 1$  y siendo  $T_A = \{t \in A \mid p \in t^\bullet\}$ . Ahora bien, por la regla de activación de la Def. 3.4 es claro que esta expresión es  $M_{2,1}(p)$ . Por tanto,  $M_2''(p) = \varphi_N^{\beta+1}(M_2)(p)$ ,  $\forall p \in P$ .

Por otra parte, tras el disparo de  $(R, in)$  se desmarca el lugar asociado a  $S(M_1)$  y se marca con un token el lugar asociado al estado  $q$  dado por:

$$q_j = \begin{cases} s_j - 1 & \text{si } t_j \notin R \\ \delta(t_j) - 1 & \text{si } t_j \in R \end{cases}$$

siendo  $s = S(M_1)$ . En base a la regla de activación, y en base a la construcción realizada, es inmediato que  $S(M_2) = q$ , y por tanto:

$$M_2''(S(M_2)) = 1 = \varphi_N^{\beta+1}(M_2)(S(M_2))$$

Finalmente, el resto de lugares permanecen desmarcados tanto en  $M_2''$  como en  $\varphi_N^{\beta+1}(M_2)$ . Por lo tanto:  $M_2'' = \varphi_N^{\beta+1}(M_2)$ .

Recíprocamente, si  $\varphi_N^\beta(M_1)[(S(M_1), (R, in)) \rangle \varphi_N^{\beta+1}(M_2)$ ,  $\forall \beta \in \mathbb{N}$ , entonces  $R$  debe estar permitido en  $N$  bajo  $M_1$ . Tras su disparo obtenemos un marcaje  $\tilde{M}_2$ , y por tanto, aplicando el sentido directo, ya demostrado, obtenemos

$$\varphi_N^\beta(M_1)[(S(M_1), (R, in)) \rangle \varphi_N^{\beta+1}(\tilde{M}_2)$$

De ahí concluimos  $\varphi_N^{\beta+1}(\tilde{M}_2) = \varphi_N^{\beta+1}(M_2)$ , y por tanto, como  $\varphi_N^{\beta+1}$  es inyectiva obtenemos que  $M_2 = \tilde{M}_2$ .  $\square$

La siguiente definición nos permite asociar a cada secuencia de pasos temporizada ss-finita en  $N$  una secuencia de ocurrencia en  $N''$ , que la simula.

**Definición 4.4** Sea  $N = (P, T, F, W, \delta, M_0)$  una RPTM y sea  $N'' = (P'', T'', F'', W'', M_0'')$  la Red No Temporizada asociada para la semántica de las secuencias de pasos temporizadas ss-finitas. La función  $\psi : S(N, M_0) \longrightarrow L''(N'', M_0'')$ , que relaciona ambas semánticas está definida tomando  $\psi(\sigma)$  para cada  $\sigma = M_0[B_0] \dots M_{n-1}[B_{n-1}]M_n$ , como sigue:

$$\psi(\sigma) = \varphi_N^0(M_0)t'_0\varphi_N^1(M_1) \dots \varphi_N^{n-1}(M_{n-1})t'_{n-1}\varphi_N^n(M_n)$$

donde  $t'_j = (S(M_j), (B_j, in))$ , para  $j = 0, \dots, n-1$ .  $\square$

**Corolario 4.1** Sea  $N = (P, T, F, W, \delta, M_0)$  una RPTM,  $N''$  la Red No Temporizada asociada según la semántica de las secuencias de pasos temporizadas ss-finitas y  $\sigma = B_1^{(\beta_1)} \dots B_r^{(\beta_r)}$ , con  $B_j \subseteq T$ ,  $B_j \neq \emptyset$ ,  $\beta_j \in \mathbb{N}$ ,  $\forall j \in \{1, \dots, r\}$  y  $\beta_1 < \dots < \beta_r$ . Entonces

$$M_0[\sigma^{(n)}]M_n \text{ si y sólo si } \varphi_N^0(M_0)[\psi(\sigma)]\varphi_N^{(n)}(M_n)$$

□

A continuación estudiamos la decidibilidad de las propiedades que hemos introducido en la Sección 3 para esta semántica restrictiva. En primer lugar, como no puede haber ejecuciones solapadas de la misma transición, el árbol de computaciones es finitario, por lo que el Problema de Alcance Estricto, la  $\beta$ -vivacidad y la ausencia de  $\beta$ -bloqueos son trivialmente decidibles. Para ello basta explorar dicho árbol hasta la profundidad  $\beta$ .

Para decidir la propiedad de  $s, k$ -ilimitación lineal, y la  $s$ -ilimitación uniforme podemos aplicar la simulación presentada, pues tenemos la siguiente propiedad.

**Proposición 4.1** Sea  $N = (P, T, F, W, \delta, M_0)$  una RPTM, y sea  $N' = (P', T', F', W', M'_0)$  la Red No Temporizada asociada siguiendo la Def. 4.2. Entonces:

1.  $N$  es  $s, k$ -ilimitada linealmente sii en la red  $N'$  existe algún  $M' \in [M'_0]$  con  $M'(s) \geq M'(\text{reloj}) \geq k$ .
2.  $N$  es  $s$ -ilimitada uniformemente sii en la red  $N'$  para todo  $M' \in [M'_0]$  existe algún  $M'' \in [M']$  con  $M''(s) \geq M''(\text{reloj})$ .

**Demostración:** Ambos resultados son consecuencias inmediatas del corolario 4.1. □

**Corolario 4.2** La propiedad de ilimitación  $s, k$ -lineal y la  $s$ -ilimitación uniforme de Redes de Petri Temporizadas con su semántica de secuencias de pasos temporizadas ss-finitas, son ambas decidibles.

**Demostración:** En lo que concierne a la primera propiedad, podemos decidir la propiedad equivalente sobre Redes de Petri No Temporizadas a la que hemos reducido ésta, añadiendo a la red una nueva transición  $t$  disparable una vez que haya transcurrido el tiempo  $k$  (ver figura 7). El efecto de esta nueva transición es extraer un token de los lugares  $s$  y  $\text{reloj}$ . Sólo podemos disparar la transición  $t$  cuando tengamos un token en el lugar  $p_2$ , que sólo puede obtenerse disparando  $t_1$ . Esta transición ( $t_1$ ) sólo puede ser disparada una vez (sólo hay un token en  $p_1$ ), que es precisamente cuando dispongamos de  $k$  o más tokens sobre el lugar  $\text{reloj}$ .

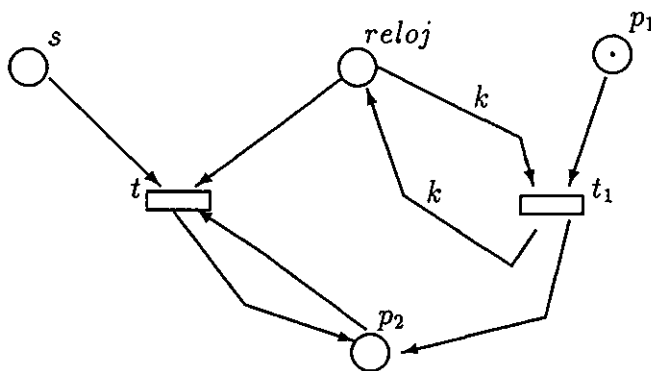


Figura 7: Red utilizada para decidir la  $s, k$ -ilimitación lineal

Entonces,  $N'$  tiene la propiedad deseada sii existe un marcaje alcanzable distinto del inicial que no tenga tokens sobre el lugar *reloj*. Es decir, hemos reducido el problema a un problema de alcance en uno o más pasos de un marcaje en el que un lugar tenga cero tokens (problema de alcance nulo), el cual es decidible (ver [Pet81]).

Para la segunda propiedad, añadimos a  $N'$  una transición  $t$  cuyo efecto sea extraer un token de  $s$  y un token del lugar *reloj*. De esta forma,  $N'$  tiene la propiedad deseada sii el conjunto de marcajes que no tienen tokens en el lugar *reloj* es un *home space* de la red, propiedad que es decidible (véase [Fru86, JoFr91]).  $\square$

### 4.3 Caso 2: Semántica de Secuencias sds-finitas

Nuestro objetivo ahora es generalizar la construcción presentada en la sección anterior al caso de la semántica de secuencias de pasos temporizadas sds-finitas. Ello significa que eliminamos la restricción introducida de que no haya transiciones con varias ejecuciones solapadas.

Para ello, no son necesarias demasiadas modificaciones con respecto al caso anterior, ya que, aunque podemos tener varias instancias de la misma transición ejecutándose simultáneamente, no podemos tener dos ejecuciones de la misma transición que hayan comenzado en el mismo instante. Entonces, podemos representar los estados de las computaciones mediante un marcaje y una función que nos indique si para cada transición  $t$  y cada número natural  $\beta < \delta(t)$ , tenemos una ejecución pendiente de  $t$  que termine después de  $\beta$  unidades de tiempo. Así,

las diferencias entre la construcción previa y la actual se basarán en la sustitución de las tuplas que indicaban si había alguna ejecución pendiente de cada transición, por conjuntos de pares  $(t, n)$ , cuyos elementos indican que hay alguna ejecución pendiente de  $t$  que terminará después de  $n$  unidades de tiempo. Puesto que hay un número finito de tales conjuntos, podemos obtener una Red de Petri No-Temporizada cuya semántica de secuencias de ocurrencia codifique la semántica de secuencias de pasos temporizadas sds-finitas de la Red de Petri Temporizada considerada. De nuevo, esto se hace definiendo un autómata de estados finitos cuyos estados correspondan a aquellos conjuntos de pares, de una forma muy similar a como se hizo en la sección anterior.

**Definición 4.5** (Red de Petri No-Temporizada asociada a una RPT)

Sea  $N = (P, T, F, W, \delta, M_0)$  una RPTM. Se define el autómata de estados finitos  $\mathcal{A}$  que controla la evolución del sistema según la semántica de secuencias de pasos temporizadas sds-finitas de la forma siguiente:

$$\mathcal{A} = (Q', \Sigma', \Theta', \delta', \Gamma', q_0)$$

donde:

$$Q' = \mathcal{P}(\{(t, n) \mid t \in T \wedge n \in \{1, \dots, \delta(t) - 1\}\})$$

$$q_0 = \emptyset$$

$$\Sigma' = \{(A, in) \mid A \in \mathcal{P}(T)\}$$

$$\Theta' = \{(out, A) \mid A \in \mathcal{P}(T)\}$$

$$\delta' : Q' \times \Sigma' \longrightarrow Q' \text{ y } \Gamma' : Q' \times \Sigma' \longrightarrow \Theta', \text{ definidas como sigue:}$$

$$(i) \delta'(q, (A, in)) \doteq \{(t, n) \mid n \geq 1 \wedge (t, n+1) \in q\} \cup \{(t, \delta(t) - 1) \mid t \in A \wedge \delta(t) > 1\}$$

$$(ii) \Gamma'(q, (A, in)) \doteq \{t \in T \mid (t, 1) \in q \vee (t \in A \wedge \delta(t) = 1)\}$$

En este caso, los estados son conjuntos de pares  $(t, n)$ , que indican qué transiciones están en ejecución, y cuánto tiempo les queda para concluir su ejecución. Por supuesto, puede haber varias copias de una misma transición en ejecución, es decir, una misma transición puede aparecer en varios pares en un mismo estado. El estado inicial corresponde a un marcaje estable, en el que no hay ninguna transición en ejecución; por lo tanto, éste se corresponde con el conjunto vacío. Las



entradas y salidas del autómata son de nuevo conjuntos de transiciones, que representan respectivamente los pasos disparados en cada momento, y las transiciones que terminan su ejecución. Las funciones  $\delta$  y  $\Gamma$  codifican la regla de disparo.

De nuevo, la Red de Petri No Temporizada se obtiene aplicando primero la construcción de la definición 4.1 al autómata que acabamos de definir, y obteniendo a partir de la red resultado, la red  $N''$  exactamente como en la definición 4.2.  $\square$

Los algoritmos para decidir las propiedades introducidas en la Sección 3 son análogos a los correspondientes al caso de la semántica de secuencias de pasos temporizadas ss-finitas. En particular, el árbol de computaciones todavía es finitario, por lo que las propiedades decididas a partir de él en el primer caso son de nuevo decidibles, por medio de su exploración hasta la profundidad dada.

## 4.4 Construcción general

En esta sección eliminaremos todas las restricciones impuestas a las secuencias de pasos temporizadas, permitiendo ahora que cada transición se dispare varias veces en cada instante de tiempo. La construcción no puede seguir el mismo procedimiento que en los casos anteriores, pues es claro que en general obtendríamos una red con un número infinito de lugares. Por ello, seguiremos un camino diferente. Su primer paso consistirá en considerar las Redes No-Temporizadas, con su semántica de pasos, demostrando que esta semántica puede ser simulada por la semántica de secuencias de ocurrencia de una Red de Petri asociada.

### 4.4.1 Simulación de la Semántica de Pasos de las Redes de Petri No Temporizadas

Comenzaremos definiendo las versiones de los problemas presentados en la Sección 3, para Redes de Petri No-Temporizadas con su semántica de secuencias de pasos.

**Definición 4.6** (Problema de Alcance Estricto para la Semántica de Pasos)

Sea  $N = (P, T, F, W, M_0)$  una Red de Petri No-Temporizada Marcada,  $M$  un marcaje de ésta, y  $\beta \in \mathbb{N}$ . Se dice que  $M$  es alcanzable en  $N$  en  $\beta$  pasos, lo que denotaremos por  $M \in [M_0]_\beta$ , si y sólo si existe una secuencia  $\sigma$  de pasos no vacíos de longitud  $\beta$  tal que  $M_0[\sigma]M$ .  $\square$

También aceptaremos en ocasiones pasos vacíos, lo que es equivalente a permitir secuencias (de pasos no vacíos) de longitud menor o igual que el número de pasos  $\beta$ . La correspondiente relación de alcance se denotará por  $M \in [M_0]_{\beta}^{\leq}$ .

**Definición 4.7** Sea  $N = (P, T, F, W, M_0)$  una Red de Petri No-Temporizada Marcada,  $s \in P$ , y  $k \in \mathbb{N}$ .

1. Se dice que  $N$  es *s, k-ilimitada linealmente* sii existe algún  $\beta \geq k$ , y algún marcaje  $M$  tal que  $M \in [M_0]_{\beta}$  y  $M(s) \geq \beta$ .
2. Se dice que  $N$  es *s-ilimitada uniformemente* sii para todo  $\beta \in \mathbb{N}$  y para todo marcaje  $M \in [M_0]_{\beta}$  existe algún  $\gamma \in \mathbb{N}$  y algún marcaje  $M' \in [M]_{\gamma}$  tal que  $M'(s) \geq \gamma + \beta$ .

□

**Definición 4.8** ( $\beta$ -vivacidad para la Semántica de Pasos)

Sea  $N = (P, T, F, W, M_0)$  una Red de Petri No-Temporizada Marcada, y  $\beta \in \mathbb{N}$ . Se dice que  $t \in T$  es  *$\beta$ -viva* sii para cualquier marcaje alcanzable  $M$  existe otro marcaje  $M'$  tal que  $M' \in [M]_{\beta}$  que permite el disparo de  $t$ .

Se dice que  $N$  es  *$\beta$ -viva* sii todas sus transiciones son  $\beta$ -vivas.

□

Obsérvese que al tratarse de redes no temporizadas, la definición de la propiedad de  $\beta$ -vivacidad exige que  $t$  sea disparable exactamente en  $\beta$  pasos (pues no se permiten pasos vacíos). No obstante, si somos capaces de decidir esta propiedad también seríamos capaces de decidir en todo momento si  $t$  es disparable en tiempo  $\beta$ , es decir, podremos decidir si para todo marcaje alcanzable  $M$  existe otro  $M' \in [M_0]_{\beta}^{\leq}$  que permite el disparo de  $t$ . Para ello bastaría añadir una transición “inócua” sin precondiciones ni postcondiciones, que por tanto siempre podrá dispararse, sin alterar por ello el estado del resto de la red, lo que nos permitiría “rellenar” sin consecuencias los pasos vacíos.

**Definición 4.9** (Ausencia de  $\beta$ -bloqueos para la Semántica de Pasos)

Sea  $N = (P, T, F, W, M_0)$  una Red de Petri No-Temporizada Marcada, y  $\beta \in \mathbb{N}$ . Se dice que un marcaje  $M$  de  $N$  es *muerto* sii no hay ninguna transición permitida bajo  $M$ . Se dice que  $N$  *puede  $\beta$ -bloquearse* sii hay algún marcaje muerto  $M' \in [M_0]_{\beta}$ .

□

Para demostrar la decidibilidad de estos problemas, vamos a construir para cada red otra, que simule la semántica de pasos de la primera (teniendo en cuenta la longitud de las secuencias) mediante la semántica de secuencias de ocurrencia ordinaria de la red construida.

**Definición 4.10** Sea  $N = (P, T, F, W, M_0)$  una Red de Petri No-Temporizada Marcada con su semántica de pasos. Para simular su comportamiento por medio de la semántica de secuencias de ocurrencia de una red asociada vamos a considerar dos nuevos lugares  $p^I$  y  $p^S$ , cuyo objeto será permitirnos separar la ejecución de una primera transición de un paso de la de las demás. La utilidad de los mismos consiste en que nos permiten contabilizar el número de pasos, que identificamos con la primera transición escogida de cada uno de ellos. Para ello anotaremos un token sobre un lugar *reloj* al ejecutar cada una de dichas primeras transiciones. Para poder distinguir entre la primera y las demás necesitamos asimismo reemplazar cada transición  $t$  de la red de partida por dos copias:  $t^I$  y  $t^S$ , que representan respectivamente el disparo de  $t$  como primera transición de un paso y el disparo de  $t$  en un paso, pero no como la primera transición ejecutada en la simulación de ese paso.

Por otra parte, para poder simular correctamente un paso no podemos colocar de forma inmediata sobre las postcondiciones de las transiciones disparadas los correspondientes tokens. Al efecto, introducimos unas copias de los lugares de partida, sobre las que depositamos los tokens que a ellos iban destinados. Por supuesto, una vez concluida la simulación de un paso, procederemos a instalar los tokens que se encuentran en esos lugares sobre los lugares originales.

En definitiva, consideramos los siguientes conjuntos de lugares y transiciones:

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \{\bar{p} \mid p \in P\} \\ T^I &= \{t^I \mid t \in T\} \\ T^S &= \{t^S \mid t \in T\} \\ T_p &= \{t_p \mid p \in P\}\end{aligned}$$

Utilizando los mismos definimos la red asociada a  $N$ ,  $N' = (P', T', F', W', M'_0)$  de la forma siguiente:

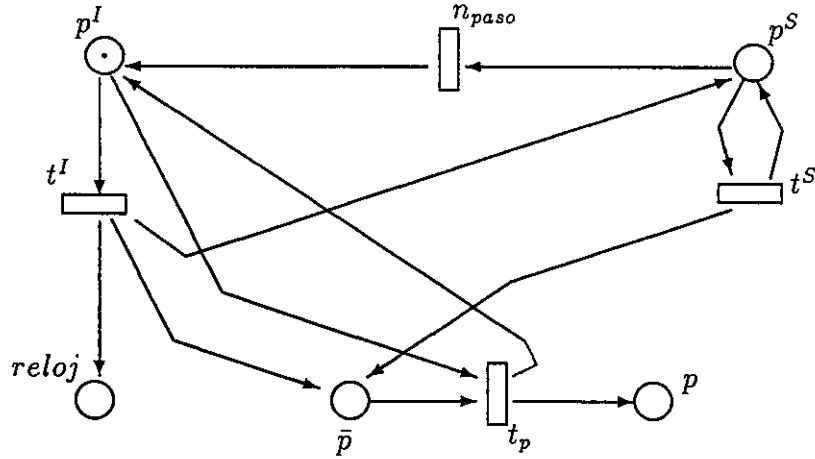


Figura 8: Construcción para la Semántica sin Restricciones

$$P' = P \cup \bar{P} \cup \{p^I, p^S, reloj\}$$

$$T' = T^I \cup T^S \cup T_p \cup \{n_{paso}\}$$

$$F' = \{(p^S, t^S), (t^S, p^S), (p^I, t^I), (t^I, p^S), (t^I, reloj) \mid t \in T\} \cup \\ \{(t^I, \bar{p}), (t^S, \bar{p}) \mid (t, p) \in F\} \cup \{(p^I, t_p), (t_p, p^I), (\bar{p}, t_p), (t_p, p) \mid p \in P\} \cup \\ \{(p^S, n_{paso}), (n_{paso}, p^I)\} \cup \{(p, t^I), (p, t^S) \mid (p, t) \in F\}$$

$$W'(f) = \begin{cases} W(p, t) & \text{si } f = (p, t^I) \vee f = (p, t^S), t \in T \\ W(t, p) & \text{si } f = (t^I, \bar{p}) \vee f = (t^S, \bar{p}) \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$M'_0(p) = \begin{cases} M_0(p) & \text{si } p \in P \\ 1 & \text{si } p = p^I \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

□

Esta construcción está ilustrada esquemáticamente en la figura 8.

Con esta construcción, la simulación de un paso de la red original se realiza como sigue: todas las transiciones disparadas en un paso son ahora disparadas secuencialmente, de modo que los tokens generados por estos disparos se colocan en las copias  $\bar{p}$  de los lugares de partida. Para ello comenzamos disparando la copia  $t^I$  de la primera transición (una cualquiera de ellas) dentro del paso a simular. El disparo de esta transición  $t^I$  ya anota un nuevo token sobre el lugar  $reloj$  para indicar la ejecución de un paso más, y coloca sobre las copias de sus postcondiciones

los tokens correspondientes. Además, con su disparo el lugar  $p^I$  queda desmarcado, lo que prohíbe el disparo de otras transiciones en  $T^I$ . Por contra, el lugar  $p^S$  queda marcado, lo que permite disparar las demás transiciones del paso disparando las copias  $t^S$  asociadas, que también envían a las copias de sus postcondiciones los correspondientes tokens.

Una vez disparadas todas esas transiciones, se trasladan los tokens desde las copias hasta los lugares originales. Para ello debemos dar por concluido el paso disparando la transición  $n_{paso}$ , que recupera el token sobre  $p^I$ , y deja desmarcado  $p^S$ . En ese momento, las transiciones  $t_p$  tales que su lugar asociado  $\bar{p}$  esté marcado estarán permitidas, y podrán ser disparadas para recuperar los tokens sobre los lugares de partida.

A cada marcaje de la red de partida  $N$  le podemos asociar un marcaje en la red construida  $N'$  según la definición anterior. Para ello introducimos la siguiente función.

**Definición 4.11** (Función de Correspondencia de Marcajes)

Sea  $N = (P, T, F, W, M_0)$  una Red de Petri No Temporizada Marcada y sea  $N' = (P', T', F', W', M'_0)$  la red asociada según la construcción anterior. Para cada  $\beta \in \mathbb{N}$  se define la *función de correspondencia de marcajes* de la forma siguiente:  $\varphi_N^\beta: \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$ , con

$$\varphi_N^\beta(M)(p') \doteq \begin{cases} M(p) & \text{si } p' = p \in P \\ 1 & \text{si } p' = p^I \\ \beta & \text{si } p' = \text{reloj} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

siendo  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{M}'$  los conjuntos de marcajes correspondientes a  $N$  y  $N'$  respectivamente. □

**Definición 4.12** (Multiconjunto asociado a una Secuencia de Ocurrencia)

Sea  $N = (P, T, F, W, M_0)$  una Red de Petri No Temporizada Marcada y sea  $\sigma$  una secuencia de ocurrencia de la misma. Se define el multiconjunto  $B(\sigma): T \longrightarrow \mathbb{N}$ , asociado a  $\sigma$ , de la forma siguiente:

$$B(\sigma)(t) \doteq \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma = \langle \rangle \\ B(s)(t) + 1 & \text{si } \sigma = \langle s \rangle \circ t \\ B(s)(t) & \text{si } \sigma = \langle s \rangle \circ t', \quad t' \neq t \end{cases}$$

□

El siguiente teorema refleja el hecho de que cada paso de la red de partida  $N$  puede ser simulado en la red  $N'$ :

**Teorema 4.2** Sea  $N = (P, T, F, W, M_0)$  una Red de Petri No Temporizada Marcada y sea  $N'$  la red asociada a  $N$  según la construcción de la Def. 4.10. Entonces, dados dos marcajes cualesquiera de  $N$ ,  $M$  y  $M_1$ , y dado un multiconjunto  $R$  de transiciones en  $T$ , se tiene  $M[R]M_1$  si y sólo si existe una secuencia de ocurrencia  $\sigma$  en  $N'$  que verifica las dos condiciones siguientes:

1.  $\varphi_N^\beta(M)[\sigma]\varphi_N^{\beta+1}(M_1), \quad \forall \beta \in \mathbb{N}$
2.  $\forall t \in T : B(\sigma)(t^I) + B(\sigma)(t^S) = R(t)$

**Demostración:**

$\Rightarrow$  : Supongamos que  $M[R]M_1$ . Entonces, sea  $C_R = \{t \in T \mid R(t) > 0\} = \{t_1, \dots, t_m\}$ . Dado que  $R$  está permitido en  $N$  bajo el marcaje  $M$ , la secuencia de disparos:  $t_1^I t_1^S \dots t_1^S t_2^S \dots t_2^S \dots t_m^S \dots t_m^S$  (repitiendo  $R(t_1) - 1$  veces  $t_1^S$  y  $R(t_j)$  veces cada  $t_j$ , para cada  $2 \leq j \leq m$ ) estará permitida en  $N'$  bajo el marcaje  $\varphi_N^\beta(M)$ .

Tras dicha secuencia de disparos se obtiene el siguiente marcaje en  $N'$ :

$$M'_1(p') = \begin{cases} 1 & \text{si } p' = p^S \\ 0 & \text{si } p' = p^I \\ \beta + 1 & \text{si } p' = \text{reloj} \\ M(p) - \sum_{i=1}^m R(t_i) \cdot W(p, t_i) & \text{si } p' = p \in P \\ \sum_{t_j \in \mathcal{T}} R(t_j) \cdot W(t_j, p) & \text{si } p' = \bar{p} \in \bar{P} \end{cases}$$

Entonces, como el lugar  $p^S$  está marcado, es posible disparar la transición  $n_{\text{paso}}$ , que desmarca dicho lugar y coloca un token sobre el lugar  $p^I$ . En esta situación es posible disparar las transiciones  $t_p$  que tengan marcado su lugar  $\bar{p}$  asociado hasta que lleguemos a vaciar todos esos lugares. Cuando esto ocurra, todos los tokens

que cada lugar  $\bar{p}$  tenía habrán sido depositados sobre  $p$ . Por tanto, el marcaje en ese momento será:

$$M'_2(p') = \begin{cases} 1 & \text{si } p' = p^I \\ 0 & \text{si } p' = p^S \\ \beta + 1 & \text{si } p' = \text{reloj} \\ M(p) - \sum_{i=1}^m R(t_i) \cdot W(p, t_i) + \sum_{t_j \in \bullet p} R(t_j) \cdot W(t_j, p) & \text{si } p' = p \in P \\ 0 & \text{si } p' = \bar{p} \in \bar{P} \end{cases}$$

Es decir,  $M'_2 = \varphi_N^\beta(M_1)$ , como queríamos demostrar. Por otra parte, el multiconjunto asociado a la secuencia de ocurrencia obtenida restringido a las transiciones de  $T^I \cup T^S$  coincide con  $R$ .

$\Leftarrow$  : Recíprocamente, supongamos que existe una secuencia de ocurrencia  $\sigma$  en  $N'$  con las condiciones citadas. Entonces, teniendo en cuenta la forma del marcaje de partida:  $\varphi_N^\beta(M)$ , la forma del marcaje final:  $\varphi_N^{\beta+1}(M_1)$  (en el que los lugares  $\bar{p}$  están todos ellos vacíos), y dado que el lugar *reloj* gana sólo un token,  $\sigma$  debe ser una cadena de transiciones de la forma siguiente:

$$\sigma = t_1^I t_2^S \dots t_r^S n_{\text{paso}} t_{p_1} \dots t_{p_h}$$

Entonces, como las transiciones  $t_1^I t_2^S \dots t_r^S$  pueden dispararse en cualquier otro orden, podemos agrupar en particular los disparos de cada transición, obteniendo una secuencia de ocurrencia equivalente de la forma:

$$\tilde{\sigma} = t_1^I t_1^S \dots t_1^S t_2^S \dots t_2^S \dots t_m^S \dots t_m^S n_{\text{paso}} t_{p_1} \dots t_{p_h}$$

Además, dado que  $B(\sigma)(t^I) + B(\sigma)(t^S) = R(t)$ , para toda  $t \in T$ , obtenemos:

$$C_R = \{t \in T \mid R(t) > 0\} = \{t_1, \dots, t_m\}$$

En consecuencia, el paso  $R$  estará permitido en  $N$ , ya que los lugares de  $P$  tienen el mismo marcaje en  $N$  y  $N'$ . Sea entonces  $\tilde{M}_1$  el marcaje obtenido en  $N$  tras el disparo de  $R$ . Este marcaje coincide con el marcaje  $M'_1$  obtenido en  $N'$  tras el disparo de la secuencia de transiciones  $t_1^I t_1^S \dots t_1^S t_2^S \dots t_2^S \dots t_m^S \dots t_m^S$ , si se identifican los lugares  $p$  y  $\bar{p}$ ; es decir,  $\tilde{M}_1(p) = M'_1(p) + M'_1(\bar{p})$ ,  $\forall p \in P$ . El disparo de  $n_{\text{paso}}$  no modifica la validez de lo anterior, ni tampoco los disparos de las transiciones  $t_{p_j}$ , pues mantienen invariable la suma  $M'_1(p_j) + M'_1(\bar{p}_j)$ . Por tanto, como al final de

ese proceso los lugares  $\bar{p}$  están desmarcados y el valor de esa suma no se ha visto alterado, obtenemos que el marcaje  $\varphi_N^\beta(M_1)$  tiene la forma siguiente:

$$\varphi_N^\beta(M_1)(p') = \begin{cases} 1 & \text{si } p' = p' \\ \beta + 1 & \text{si } p' = \text{reloj} \\ \tilde{M}_1(p) & \text{si } p' = p \in P \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

lo cual coincide con  $\varphi_N^{\beta+1}(\tilde{M}_1)(p')$ ,  $\forall p' \in P'$ , y por tanto, por la definición de  $\varphi_N^\beta$  obtenemos  $M_1 = \tilde{M}_1$ , y de ahí  $M[R]M_1$ .  $\square$

Este resultado se extiende a secuencias de pasos mediante el siguiente teorema, que requiere una definición previa:

**Definición 4.13** (Secuencia de pasos de  $N$  correspondiente a una secuencia de ocurrencia de  $N'$ ) Sea  $N = (P, T, F, W, M_0)$  una Red de Petri Marcada y  $N'$  su red asociada según la Def. 4.10. Si para dos marcajes cualesquiera de  $N$ ,  $M$  y  $M'$  se tiene  $\varphi_N^\beta(M)[\sigma]\varphi_N^{\beta+n}(M_1)$ , con  $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_s$ , definimos:

1. La *subsecuencia tac* de  $\sigma$ ,  $\text{tac}(\sigma) = \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_n}$ , constituida por los disparos de la transición  $n_{\text{paso}}$ .
2. La *descomposición guiada por pasos* de  $\sigma$  se define tomando  $\sigma = \sigma^1 \circ \dots \circ \sigma^n$  donde para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$  tenemos  $\sigma^j = \sigma_{i_{j-1}+1} \dots \sigma_{i_j}$ , tomando  $i_0 = 0$ .
3. La *secuencia de pasos* de  $N$  simulada por  $\sigma$   $BS(\sigma) = B(\sigma^1) \dots B(\sigma^n)$ , tomando el multiconjunto asociado a cada secuencia  $\sigma^j$  sobre el conjunto  $T$ .

$\square$

**Teorema 4.3** Sea  $N = (P, T, F, W, M_0)$  una Red de Petri Marcada,  $N'$  su red asociada según la Def. 4.10, y  $n \in \mathbb{N}$ . Si para dos marcajes de  $N$ ,  $M$  y  $M'$  tenemos  $\varphi_N^\beta(M)[\sigma]\varphi_N^{\beta+n}(M_1)$ , entonces en  $N$  tenemos  $M[BS(\sigma)]M_1$ .

**Demostración:** No podemos aplicar directamente el teorema 4.2, ya que no sabemos cómo son los marcajes intermedios. Sin embargo, al final de  $\sigma$  alcanzamos un marcaje que se encuentra en el rango de  $\varphi_N^{\beta+n}$ , por lo que todos los lugares en



$\bar{P}$  están vacíos. Entonces, podemos adelantar los disparos de las transiciones  $t_p$  hasta que se ejecuten con el paso que generó los correspondientes tokens sobre el lugar  $\bar{p}$ , para obtener marcajes intermedios sin tokens sobre los lugares  $\bar{p}$ . De esta forma, ya es posible aplicar el teorema 4.2 para concluir la demostración.  $\square$

**Corolario 4.3** Las propiedades siguientes son decidibles para Redes de Petri No Temporizadas con la semántica de pasos:

1. El Problema de Alcance Estricto.
2. La propiedad de  $s, k$ -ilimitación lineal y la propiedad de  $s$ -ilimitación uniforme.

**Demostración:**

1. El problema en cuestión se reduce vía la codificación introducida a un problema de alcance ordinario sobre la Red de Petri que se obtiene: se ha de obtener el marcaje deseado sobre los lugares de la codificación correspondientes a los originales,  $\beta$  tokens en el lugar *reloj* y el submarcaje inicial sobre el resto de los lugares.
2. La demostración de la decidibilidad de la  $s, k$ -ilimitación lineal y la  $s$ -ilimitación uniforme es análoga a la realizada para el corolario 4.2.

$\square$

También podemos decidir la  $\beta$ -vivacidad usando esta simulación. Esto es lo que establece el siguiente teorema.

**Teorema 4.4** Siendo  $N = (P, T, F, W, M_0)$  una Red de Petri Marcada con su semántica de pasos, y  $\beta \in \mathbb{N}$ , podemos decidir si  $N$  es  $\beta$ -viva.

**Demostración:** Consideremos la red  $N'$  asociada a  $N$  aplicando la Def. 4.10 y sea  $t \in T$ . Aplicamos a dicha red el teorema 2.3, para obtener un conjunto de marcajes  $\{M_B^1, \dots, M_B^i\}$  con la propiedad de que para cualquier marcaje alcanzable  $M$  de  $N'$  existe un  $i$  tal que  $M_B^i \leq M$ .

Consideramos entonces el marcaje  $M^t$  asociado a  $t$  en  $N'$ , definido por:  $M^t(p) = W'(p, t)$ ,  $\forall p \in P'$ .

Tenemos que analizar si para todo  $i \in \{1, \dots, b\}$  existe algún  $M'' \in [M_B^i]$  tal que  $M''(\text{reloj}) = M_B^i(\text{reloj}) + \beta$  y  $M^t \leq M''$ .

Para ello definimos una nueva red  $N^i = (P', T', F'', W'', M_0^{\beta, i})$  asociada a  $N$ , que se obtiene a partir de  $N'$  invirtiendo el tiempo, lo que significa invertir todos los arcos en  $F'$  que alcanzan el lugar *reloj*, e inicializar este lugar con  $\beta$  tokens. El resto de los lugares se marca con su número de tokens en  $M_B^i$ . Entonces tenemos que analizar si hay algún  $M'' \in [M_0^{\beta, i}]$  tal que  $M^t \leq M''$  y  $M''(\text{reloj}) = 0$ . Esto puede hacerse estudiando el árbol de cobertura de  $N^i$ .

Si alguno de estos tests fallase, entonces  $t$  no sería  $\beta$ -viva en la red original  $N$ . En caso contrario, ya que para cualquier marcaje alcanzable  $M_1$  en  $N'$  hay algún  $i \in \{1, \dots, b\}$  tal que  $M_B^i \leq M_1$ , tenemos algún marcaje alcanzable  $M''$  a partir del marcaje  $M_B^i$  tal que  $M''(p) \geq M^t(p)$ , para todo  $p \in P$  y  $M''(\text{reloj}) = M_B^i(\text{reloj}) + \beta$ . La secuencia de ocurrencia  $\sigma$  tal que  $M_B^i[\sigma]M''$  puede ser disparada a partir de  $M_1$ , pues éste cubre a  $M_B^i$ , conduciéndonos a un marcaje que cubre a  $M''$ , con  $\beta$  tokens más sobre el lugar *reloj* que el marcaje original. Así, el correspondiente marcaje puede ser alcanzado en  $N$  por una secuencia de pasos de longitud  $\beta$ , y  $t$  estará permitido bajo este marcaje, lo que prueba que la transición  $t$  es  $\beta$ -viva en  $N$ .  $\square$

**Teorema 4.5** Sea  $N = (P, T, F, W, M_0)$  una Red de Petri Marcada con su semántica de pasos, y  $\beta \in \mathbb{N}$ . Podemos decidir si la red  $N$  puede  $\beta$ -bloquearse.

**Demostración:** Sea  $N'$  la Red de Petri con la semántica ordinaria asociada a  $N$  según la def. 4.10. Sobre esta red añadimos una nueva transición  $t$ , la cual estará siempre permitida una vez que el lugar *reloj* alcance  $\beta$  tokens. Para ello se conecta dicha transición al lugar *reloj* como sigue:

$$W(\text{reloj}, t) = \beta = W(t, \text{reloj})$$

En consecuencia, tras  $\beta$  pasos no podrá haber bloqueos en esta red, y por tanto ésta sólo podrá bloquearse si en la red de partida había  $\beta$ -bloqueos. De esta forma, hemos reducido el problema a un problema de ausencia de bloqueos en una Red de Petri con su semántica ordinaria, propiedad que como sabemos es decidible (véase [Fru86]).  $\square$

#### 4.4.2 Simulación de las Redes de Petri Temporizadas con su semántica sin restricciones

Regresamos a nuestro problema de codificar Redes de Petri Temporizadas con Redes de Petri No Temporizadas. La construcción a realizar para codificar las Redes de Petri Temporizadas con su semántica general se basa en dividir cada transición  $t$  en  $\delta(t)$  transiciones, cada una de las cuales corresponde a un instante en la ejecución de  $t$ . Para que esta codificación simule directamente el funcionamiento de la red  $N$  se requeriría la aplicación de una hipótesis de máximo paralelismo para las transiciones correspondientes a transiciones (originales) en ejecución. No obstante, como posteriormente veremos, aunque ignoremos esta restricción (que además es en general imposible de representar sobre Redes de Petri No Temporizadas), las ejecuciones de las transiciones que no obedezcan esta hipótesis pueden ser consideradas como si hubieran empezado un poco más tarde, obteniendo así una secuencia de pasos equivalente que sí satisface la hipótesis de máximo paralelismo requerida.

**Definición 4.14** (Red asociada a una RPT)

Sea  $N = (P, T, F, W, \delta, M_0)$  una RPTM. Para cada  $t \in T$  consideremos el conjunto de transiciones (atómicas)  $C_t = \{t_1, \dots, t_{\delta(t)}\}$ . Definimos entonces la *Red de Petri asociada a  $N$* ,  $N' = (P', T', F', W', M'_0)$ , de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 P' &= P \cup \bigcup_{t \in T} \{p_i^{(t)} \mid i = 1, \dots, \delta(t) - 1\} \\
 T' &= \bigcup_{t \in T} C_t \\
 F' &= \{(p, t_{\delta(t)}) \mid p \in P \wedge t \in T \wedge (p, t) \in F\} \cup \\
 &\quad \{(p_i^{(t)}, t_i) \mid t \in T \wedge i \in \{1, \dots, \delta(t) - 1\}\} \cup \\
 &\quad \{(t_1, p) \mid t \in T \wedge p \in P \wedge (t, p) \in F\} \cup \\
 &\quad \{(t_{i+1}, p_i^{(t)}) \mid t \in T \wedge i \in \{1, \dots, \delta(t) - 1\}\} \\
 W'(f) &= \begin{cases} W(p, t) & \text{si } f = (p, t_{\delta(t)}) \\ W(t, p) & \text{si } f = (t_1, p) \\ 1 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \\
 M'_0(p) &= \begin{cases} M_0(p) & \text{si } p \in P \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}
 \end{aligned}$$

□

Esta construcción está representada en la figura 9.

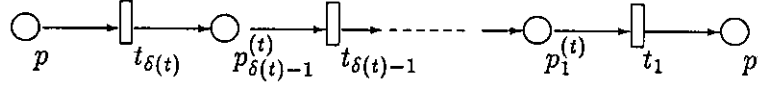


Figura 9: Red asociada a una RPT: simulación de una transición

**Definición 4.15** Sea  $N = (P, T, F, W, \delta, M_0)$  una RPTM y sea  $N' = (P', T', F', W', M'_0)$  la Red de Petri asociada. Se define la *función de correspondencia de marcas*  $\varphi_N : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$  de la forma siguiente:

$$\varphi_N(M)(p') \doteq \begin{cases} M_1(p) & \text{si } p' = p \in P \\ M_2(t, i) & \text{si } p' = p_i^{(t)}, \text{ con } i \in \{1, \dots, \delta(t) - 1\} \end{cases}$$

□

**Definición 4.16** Sea  $N = (P, T, F, W, \delta, M_0)$  una RPTM y sea  $N' = (P', T', F', W', M'_0)$  la red asociada obtenida según la construcción anterior. Se define la *función de correspondencia de pasos*  $\tau : \mathcal{M} \times \beta(T) \longrightarrow \beta(T')$ , de la forma siguiente:

$$\tau(M, B)(t') \doteq \begin{cases} B(t) & \text{si } t' = t_{\delta(t)}, t \in T \\ M_2(t, \gamma) & \text{si } t' = t_\gamma, \gamma < t_{\delta(t)}, t \in T \end{cases}$$

□

El teorema siguiente establece que las semánticas de pasos de  $N$  y  $N'$  son equivalentes.

**Teorema 4.6** Sea  $N = (P, T, F, W, \delta, M_0)$  una RPTM y  $N' = (P', T', F', W', M'_0)$  la red asociada obtenida según la construcción de la definición 4.14. Sean además  $M, M'$  dos marcajes cualesquiera de  $N$  y  $B$  un multiconjunto de  $T$ . Entonces se tiene:

$$M[B]M' \text{ si y sólo si } \varphi_N(M)[\tau(M, B)]\varphi_N(M')$$

**Demostración:** Supongamos que  $M[B]M'$  en un instante  $\beta \in \mathbb{N}$ . Entonces  $\tau(M, B)$  está permitido bajo el marcaje  $\varphi_N(M)$ . Para demostrarlo hemos de ver que  $\varphi_N(M)(p') \geq W'(p', t') \cdot \tau(M, B)(t')$ ,  $\forall t' \in T'$ , y  $\forall p' \in \bullet t'$ .

A partir de la construcción, sólo pueden darse dos casos:

1.  $p' = p \in P \wedge t' = t_{\delta(t)}$ . En este caso,  $\varphi_N(M)(p') = M_1(p)$ ,  $W'(p', t') = W(p, t)$  y  $\tau(M, B)(t') = B(t)$ . Entonces la condición deseada es inmediata, teniendo en cuenta que  $B$  está permitido en  $N$ .

2.  $p' \notin P \wedge t' = t_\gamma$ , con  $\gamma < \delta(t)$ . En tal caso,  $p' = p_\gamma^{(t)}$ , y de ahí:  $\varphi_N(M)(p') = M_2(t, \gamma)$ ,  $W'(p', t') = 1$  y  $\tau(M, B)(t') = M_2(t, \gamma)$ . Y ahora es ya inmediato que  $\varphi_N(M)(p') \geq W'(p', t') \cdot \tau(M, B)(t')$ .

Por tanto,  $\tau(M, B)$  está permitido bajo  $\varphi_N(M)$ . Sea entonces  $\bar{M}'$  el marcaje obtenido como consecuencia de su disparo, es decir,  $\varphi_N(M)[\tau(M, B)]\bar{M}'$ . Veamos que  $\bar{M}' = \varphi_N(M')$ :

1. Sea  $p \in P$ , entonces se tiene

$$\begin{aligned}\bar{M}'(p) &= \varphi_N(M)(p) - \sum_{t' \in T'} W'(p, t') \cdot \tau(M, B)(t') + \sum_{t' \in T'} W'(t', p) \cdot \tau(M, B)(t') = \\ M_1(p) - \sum_{t \in T} W(p, t) \cdot B(t) + \sum_{t \in T, \delta(t) > 1} W(t, p) \cdot M_2(t, 1) + \sum_{t \in T, \delta(t) = 1} W(t, p) \cdot B(t) = \\ M'_1(p) &= \varphi_N(M')(p)\end{aligned}$$

2. Si  $p' \notin P$ , entonces  $p' = p_i^{(t)}$ , para un cierto  $i \in \{1, \dots, \delta(t) - 1\}$ . De ahí se obtiene:

$$\begin{aligned}\bar{M}'(p') &= \varphi_N(M)(p') - \sum_{t' \in T'} W'(p', t') \cdot \tau(M, B)(t') + \sum_{t' \in T'} W'(t', p') \cdot \tau(M, B)(t') = \\ M_2(t, i) - 1 \cdot M_2(t, i) + 1 \cdot M_2(t, i + 1) &= M_2(t, i + 1) = M'_2(t, i) = \varphi_N(M')(p')\end{aligned}$$

En consecuencia,  $\bar{M}' = \varphi_N(M')$ .

Recíprocamente, supongamos que  $\varphi_N(M)[\tau(M, B)]\varphi_N(M')$ . Por tanto, tenemos

$$\varphi_N(M)(p) \geq W'(p, t_{\delta(t)}) \cdot \tau(M, B)(t_{\delta(t)}) \quad \forall p \in P, \forall t \in T, t \in p^\bullet$$

Además,  $M_1(p) = \varphi_N(M)(p)$  y  $\tau(M, B)(t_{\delta(t)}) = B(t)$ ,  $\forall p \in P, \forall t \in T, t \in p^\bullet$ . Por tanto,  $M_1(p) \geq W(p, t) \cdot B(t)$ , lo que implica que  $B$  está permitido bajo  $M$ .

El disparo de  $B$  da lugar a un marcaje  $\bar{M}$  en  $N$ . Aplicando entonces el sentido directo obtenemos que  $\varphi_N(\bar{M}) = \varphi_N(M')$ , lo que implica que  $\bar{M} = M'$ , pues  $\varphi_N$  es inyectiva.  $\square$

**Corolario 4.4** Sea  $N = (P, T, F, W, \delta, M_0)$  una RPTM,  $N'$  la red asociada aplicando la construcción de la def. 4.14 y  $N''$  la red construida sobre  $N'$  aplicando la construcción de la Def. 4.10. Entonces,  $M = (M_1, M_2)$  es un marcaje alcanzable en  $N$  en el instante  $\beta$  si y sólo si existe un marcaje alcanzable  $M'$  en  $N''$  tal que:

- (1)  $M'(p) = M_1(p) \quad \forall p \in P$
- (2)  $M'(p_i^{(t)}) = M_2(t, i) \quad \forall t \in T \wedge \forall i \in \{1, \dots, \delta(t) - 1\}$
- (3)  $M'(\text{reloj}) = \beta$
- (4)  $M'(p') = 0 \quad \text{en otro caso}$

**Demostración:** El sentido directo es una aplicación inmediata de los teoremas 4.6 y 4.2. Veamos el recíproco.

Sea  $M'$  un marcaje alcanzable en  $N''$  que verifica las condiciones (1-4). Para este marcaje existe un marcaje  $\tilde{M}$  en  $N'$  tal que  $\varphi_N^\beta(\tilde{M}) = M'$ . Entonces, a partir del teorema 4.3 obtenemos que  $\tilde{M}$  es alcanzable en  $\beta$  pasos. Además,  $\tilde{M} = \varphi_N(M)$ . La secuencia de pasos en  $N'$  que nos permite alcanzar  $\tilde{M}$  no satisface necesariamente la hipótesis de máximo paralelismo restringida a las transiciones atómicas correspondientes a los instantes de las transiciones en ejecución. En consecuencia, no podemos aplicar el teorema 4.6 paso por paso para concluir que  $M$  es alcanzable en  $\beta$  pasos en  $N$ . Sin embargo, podemos retrasar los tiempos de activación de los componentes de cada ejecución de cualquier transición (original) que no satisfaga la condición de máximo paralelismo definida. Para ser exactos, observamos el instante en el que la última componente de cada transición original ha sido disparada, y tomamos como instante de disparo de la misma dicho instante menos la duración de la transición, más uno. Entonces, consideramos el disparo secuencial de los componentes de la transición desde ese instante, y de esta forma obtenemos una secuencia de pasos equivalente que sí satisface esta condición. Entonces, podemos aplicar el teorema 4.6 paso por paso, concluyendo que el marcaje  $M$  es alcanzable en  $\beta$  pasos en  $N$ .  $\square$

Finalmente, obtenemos el siguiente corolario:

**Corolario 4.5** Sea  $N = (P, T, F, W, \delta, M_0)$  una RPTM,  $M$  un marcaje de ésta, y  $\beta \in \mathbb{N}$ . Entonces, las siguientes propiedades son decidibles:

1. El problema de alcance estricto.
2. La propiedad de  $s, k$ -ilimitación lineal y la propiedad de  $s$ -ilimitación uniforme.
3. La propiedad de ausencia de  $\beta$ -bloqueos.
4. La propiedad de  $\beta$ -vivacidad.

**Demostración:** La primera de ellas es una consecuencia inmediata del corolario previo. Las otras se obtienen considerando que estas propiedades se preservan por

la codificación a Redes No Temporizadas con su semántica de pasos, para las cuales ya hemos probado que son decidibles.

Ahora bien, el resultado no es inmediato para las propiedades de  $\beta$ -vivacidad y de  $s$ -ilimitación uniforme, pues ambas consideran marcajes no estables como punto de referencia para encontrar otro marcaje (en  $\beta$  unidades de tiempo).

En ambos casos, al trasladar un marcaje no estable  $M$  a la red  $N'$  obtenida aplicando la construcción de la Def. 4.14 nos encontramos con un problema, y es que obtenemos marcajes alcanzables en  $N'$  en  $\beta$  pasos que no se corresponden con marcajes alcanzables en  $N$  en  $\beta$  unidades de tiempo a partir del marcaje  $M$ . Ello se debe a que no estamos obligados a terminar la ejecución de las transiciones que se encontraban en ejecución en  $M$ .

En lo que respecta a la  $\beta$ -vivacidad, si en la red  $N'$  somos capaces de encontrar en  $\beta$  pasos un marcaje que permita el disparo de una transición  $t$ , entonces también podremos considerar una modificación de esa secuencia de pasos que sí considere la correcta finalización de las transiciones que estaban en ejecución (eso no modifica la posibilidad de disparar los pasos de la secuencia de pasos anterior). Esta secuencia de pasos genera un marcaje que sigue cumpliendo la propiedad deseada y que tiene correspondencia con un marcaje de la red temporizada de partida.

En lo que respecta a la  $s$ -ilimitación uniforme, el razonamiento es similar, pues nótese que la nueva secuencia de pasos genera un nuevo marcaje que en todo caso tendrá más tokens sobre el lugar  $s$ , lo que mantiene la propiedad de que este lugar tenga más de  $\beta + \gamma$  tokens.  $\square$

## Capítulo 5

### Máximo Paralelismo

Hasta ahora, una vez que una transición de una Red de Petri Temporizada está permitida, puede dispararse. Sin embargo, su disparo puede retrasarse todo lo que desee, lo que puede provocar que se pierda la posibilidad de dispararla, al adelantarse el disparo de otra transición en conflicto con ella. Una posible variación sobre la regla de activación consiste en incluir en ella la hipótesis de máximo paralelismo, forzando a las transiciones a ocurrir en cuanto estén disponibles. Como consecuencia de ello, aparecen transiciones cuya ejecución resultará imposible, estando sin embargo permitidas sin la hipótesis de máximo paralelismo. Por ejemplo, en la red de la figura 10 la transición  $t_3$  no puede ocurrir bajo máximo paralelismo.

Así, una Red de Petri Temporizada bajo la semántica de máximo paralelismo evolucionará disparando en cada instante un multiconjunto maximal de transiciones disparables al unívoco. Una consecuencia inmediata de ello es que no podemos permitir la presencia de transiciones autónomas, es decir, transiciones sin

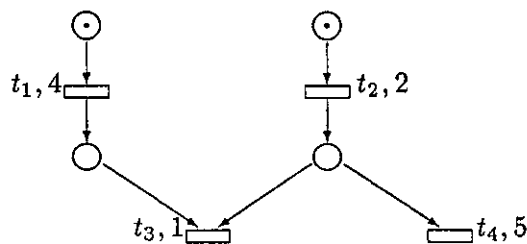


Figura 10: Red de Petri bajo máximo paralelismo



precondiciones, pues nos obligarían a considerar multiconjuntos con un número infinito de instancias de una transición. Definiremos también un modelo semántico de máximo paralelismo en el que para cada transición permitida sólo forzamos el disparo de una instancia de dicha transición. A dicho modelo semántico lo llamaremos de *máximo paralelismo débil*. Finalmente consideraremos un modelo semántico de máximo paralelismo en redes con transiciones autónomas, donde la hipótesis de máximo paralelismo no afecta a dichas transiciones autónomas.

## 5.1 Conceptos Generales

Comenzamos definiendo la clase de Redes de Petri Temporizadas que vamos a considerar:

**Definición 5.1** (Redes de Petri Temporizadas Restrictivas)

Se define una Red de Petri Temporizada Restrictiva (RPTR) como una Red de Petri Temporizada  $N = (P, T, F, W, \delta)$  tal que  $\bullet t \neq \emptyset, \forall t \in T$ .

Los marcajes de las RPTR se definen igual que en la Def. 3.2. Como allí, a las tuplas  $(P, T, F, W, \delta, M_0)$  las llamaremos *Redes de Petri Temporizadas Restrictivas Marcadas* (RPTRM).  $\square$

Ahora vamos a definir la condición de disparo. En esta definición se impone la maximalidad del multiconjunto de transiciones como condición necesaria para que éste esté permitido. De esta forma, forzamos a las transiciones a ser disparadas tan pronto como están permitidas, a menos que estén en conflicto con otras transiciones.

**Definición 5.2** (Condición de disparo para la Semántica de Máximo Paralelismo)

Sea  $N = (P, T, F, W, \delta)$  una Red de Petri Temporizada Restrictiva y sea  $M$  un marcaje de la misma. Se dice que un multiconjunto de transiciones  $R$  *está permitido* bajo este marcaje, con la semántica de máximo paralelismo, si y sólo si se cumplen las dos condiciones siguientes:

1.  $M_1(p) \geq \sum_{t \in T} R(t) \cdot W(p, t), \quad \forall p \in P$
2.  $\nexists t \in T$  tal que el multiconjunto de transiciones  $R \cup \{t\}$  satisface la condición (1) de esta definición.

Lo que denotamos por  $M[R]_p$ . El conjunto de multiconjuntos maximales de transiciones permitidas bajo el marcaje  $M$  se denota por  $E(M)$ . Este conjunto es finito (y no vacío), debido a la restricción impuesta de ausencia de transiciones autónomas.  $\square$

La primera condición de esta definición no es otra que la usual definiendo la posibilidad de disparo de una bolsa de transiciones. La segunda condición impone la restricción de que este multiconjunto debe ser maximal. En esta definición es esencial la restricción impuesta sobre las transiciones, pues si una transición no tuviese precondiciones, no habría multiconjuntos maximales de transiciones permitidos, pues tendrían que contener un número infinito de instancias de dichas transiciones.

**Definición 5.3** (Condición de disparo para la Semántica de Máximo Paralelismo Débil) Sea  $N = (P, T, F, W, \delta)$  una Red de Petri Temporizada Restrictiva y sea  $M$  un marcaje de la misma. Un multiconjunto de transiciones  $R$  se dice que está permitido bajo el marcaje  $M$  con la semántica de máximo paralelismo débil si y sólo si se cumplen las condiciones siguientes:

1.  $M_1(p) \geq \sum_{t \in T} R(t) \cdot W(p, t), \quad \forall p \in P$
2.  $\nexists t \in T, t \notin R$  tal que el multiconjunto de transiciones  $R \cup \{t\}$  satisface la condición (1) de esta definición.

Lo que denotaremos por  $M[R]_{pd}$ .  $\square$

En este caso, la condición (2) sólo nos obliga a disparar una instancia de cada transición permitida. Sin embargo, es posible disparar multiconjuntos de transiciones, y en particular, es posible disparar un multiconjunto de transiciones que esté en conflicto con el disparo de alguna transición. Es decir, la semántica de Máximo Paralelismo Débil no impone la necesidad de prescindir del disparo de una o varias instancias de alguna transición para disparar al menos una instancia de otra transición.

En este sentido, podemos definir finalmente una semántica de máximo paralelismo débil basada en el disparo de conjuntos de transiciones, y no de multiconjuntos.

**Definición 5.4** (Condición de disparo para la Semántica de Máximo Paralelismo Débil Conjuntista) Sea  $N = (P, T, F, W, \delta)$  una Red de Petri Temporizada Restrictiva y sea  $M$  un marcaje de la misma en un instante determinado. Un conjunto de transiciones  $R$  se dice que está permitido bajo el marcaje  $M$  con la semántica de Máximo Paralelismo Débil Conjuntista si y sólo si se cumplen las condiciones siguientes:

1.  $M_1(p) \geq \sum_{t \in R} W(p, t), \quad \forall p \in P$
2.  $\nexists t \in T$  tal que  $t \notin R$  y el conjunto de transiciones  $R \cup \{t\}$  satisface la condición (1) de esta definición.

Esto lo denotaremos por:  $M[R]_{pdc}$ . □

**Definición 5.5** (Regla de Activación Bajo Máximo Paralelismo)

Sea  $N = (P, T, F, W, \delta)$  una Red de Petri Temporizada Restrictiva,  $M = (M_1, M_2)$  un marcaje de la misma en un instante  $\beta \in \mathbb{N}$  y  $E(M) = \{R_1, \dots, R_n\}$  el conjunto de multiconjuntos maximales de transiciones permitidas bajo ese marcaje. Entonces, **debemos disparar** uno de estos multiconjuntos en ese instante  $\beta$ , obteniendo un nuevo marcaje  $M' = (M'_1, M'_2)$  en el instante  $\beta + 1$ , dado por:

1.  $M'_1 = M_1 - \sum_{t \in C_0} R_i(t) \cdot W(-, t) + \sum_{t \in C_1} R_i(t) \cdot W(t, -) + \sum_{(t, 1) \in C_2} M_2(t, 1) \cdot W(t, -)$

donde  $R_i$  es el multiconjunto disparado y  $C_0, C_1, C_2$  están definidos de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} C_0 &\doteq \{t \in T \mid R_i(t) > 0\} \\ C_1 &\doteq \{t \in T \mid R_i(t) > 0 \wedge \delta(t) = 1\} \\ C_2 &\doteq \{(t, 1) \in T \times \mathbb{N} \mid M_2(t, 1) > 0\} \end{aligned}$$

2.  $M'_2 : T \times \mathbb{N}^+ \longrightarrow \mathbb{N}$  con

$$M'_2(t, \beta') \doteq \begin{cases} R_i(t), & \text{si } \beta' = \delta(t) - 1 \\ M_2(t, \beta' + 1), & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Este paso se denota por:  $M_0[R]_p M'$ . □

De nuevo es importante notar que es posible que en un cierto instante, el único multiconjunto de transiciones permitido (y en consecuencia el maximal) sea el multiconjunto vacío. Este caso refleja los cambios que sufren los marcajes por efecto de la terminación de las transiciones pendientes. Por supuesto, si obtenemos suficientes tokens para disparar una o varias transiciones en un instante posterior, tendremos que dispararlas en ese instante. También es posible que el marcaje de la red llegue a estabilizarse y ninguna transición pueda ser disparada. En este caso, la red ha quedado bloqueada.

**Definición 5.6** (Secuencias de Pasos Temporizadas bajo la Semántica de Máximo Paralelismo) Sea  $N = (P, T, F, W, \delta)$  una RPTR con marcaje inicial  $M_0$ . Se dice que  $\sigma = M_0[R_0]_p \dots M_{n-1}[R_{n-1}]_p M_n$ , es una *secuencia de pasos temporizada mp-finita* de  $(N, M_0)$  sii:

1.  $\forall i \in \{0, \dots, n-1\} : R_i$  es un multiconjunto de transiciones (que puede ser vacío) permitido en el sentido de la definición 5.2 bajo el marcaje  $M_i$ .
2.  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : M_{i-1}[R_{i-1}]_p M_i$ .

De nuevo, a partir de los pasos que constituyen la secuencia de pasos  $\sigma$ , así como de sus tiempos de disparo, puede reconstruirse toda la secuencia de pasos. De esta forma escribiremos:  $M[\sigma^{(n)}]_p M_n$  □

**Definición 5.7** (Semántica de Pasos Temporizada de Máximo Paralelismo) Sea  $N = (P, T, F, W, \delta)$  una RPTR y  $M_0$  un marcaje inicial de ésta. Se define el conjunto de *secuencias de pasos temporizadas mp-finitas de  $N$*  a partir de  $M_0$ , que define su *semántica de secuencias de pasos temporizadas mp-finitas* de la forma siguiente:

$$M(N, M_0) = \{\sigma \mid \sigma \text{ es secuencia de pasos temporizada mp-finita}\}$$

□

Por último, las definiciones 5.5, 5.6 y 5.7 se adaptan con muy pocos cambios a la semántica de máximo paralelismo débil y a la semántica de máximo paralelismo débil conjuntista.

## 5.2 Análisis de Propiedades bajo Máximo Paralelismo

En esta sección consideramos Redes de Petri Temporizadas con la semántica de Máximo Paralelismo. Esta consideración será válida salvo que explícitamente se considere otro tipo de semántica.

Comenzamos definiendo las propiedades que serán objeto de estudio:

### Definición 5.8 (Problema de Alcance)

Sea  $N = (P, T, F, W, \delta)$  una RPTR con marcaje inicial  $M_0$  y sea  $M = (M_1, M_2)$  un marcaje de ésta. Se dice que  $M$  es *alcanzable* en  $N$  bajo la semántica de máximo paralelismo, lo que se denotará por  $M \in [M_0]_p$ , sii existe  $\sigma \in M(N, M_0)$  tal que  $M_0[\sigma^{(n)}]_p M$  para un cierto instante  $n$ .

De nuevo, se extiende de forma natural dicha notación para considerar marcajes cualesquiera  $M$ , es decir,  $[M]_p$  denota el conjunto de marcajes alcanzables a partir de  $M$ .  $\square$

### Definición 5.9 (Problema de Alcance Estricto)

Sea  $N = (P, T, F, W, \delta)$  una RPTR con marcaje inicial  $M_0$ ,  $M = (M_1, M_2)$  un marcaje de ésta y  $n \in \mathbb{N}$ . Se dice que  $M$  es alcanzable en  $N$  en el instante  $n$  bajo la semántica de máximo paralelismo, lo que se denotará por  $M \in [M_0]_p^n$ , sii existe  $\sigma \in M(N, M_0)$  tal que  $M_0[\sigma^{(n)}]_p M$ .  $\square$

**Definición 5.10** Sea  $N = (P, T, F, W, \delta)$  una RPTR con marcaje inicial  $M_0$ ,  $s \in P$ , y  $k \in \mathbb{N}$ .

1. Decimos que  $N$  es *s, k-ilimitada linealmente* sii existe algún  $\beta \geq k$ , y algún marcaje  $M$  tal que  $M \in [M_0]_p^\beta$  y  $M_1(s) \geq \beta$ .
2. Decimos que  $N$  es *s-ilimitada uniformemente* sii para todo  $\beta \in \mathbb{N}$  y para todo  $M \in [M_0]_p^\beta$  existe algún  $\gamma \in \mathbb{N}$  y algún marcaje  $M' \in [M]_p^\gamma$  tal que  $M'_1(s) \geq \gamma + \beta$ .

3. Decimos que  $N$  es *ilimitada* sii existe un lugar  $s' \in P$  tal que no existe un entero  $m \in \mathbb{N}$  verificando  $M_1(s') < m$ , para todo marcaje alcanzable  $M$ .

□

**Definición 5.11** (Vivacidad)

Sea  $N = (P, T, F, W, \delta)$  una RPTR con marcaje inicial  $M_0$  y  $t \in T$ . Decimos que  $t$  es *viva* sii para cualquier marcaje alcanzable  $M$  existe un marcaje  $M' \in [M]_p$  que permite el disparo de la transición  $t$ .

Decimos que  $N$  es *viva* sii todas sus transiciones son vivas.

□

**Definición 5.12** ( $\beta$ -vivacidad)

Sea  $N = (P, T, F, W, \delta)$  una RPTR con marcaje inicial  $M_0$ ,  $\beta \in \mathbb{N}$  y  $t \in T$ . Decimos que  $t$  es  $\beta$ -*viva* sii para cualquier marcaje alcanzable  $M$  existe un marcaje  $M' \in [M]_p^\beta$  que permite el disparo de la transición  $t$ .

Decimos que  $N$  es  $\beta$ -*viva* sii todas sus transiciones son  $\beta$ -vivas.

□

**Definición 5.13** (Ausencia de bloqueos)

Sea  $N = (P, T, F, W, \delta)$  una RPTR con marcaje inicial  $M_0$ . Decimos que un marcaje estable  $M$  de  $N$  es *muerto* sii no hay ninguna transición permitida bajo  $M$ . Decimos que  $N$  *puede bloquearse* sii existe algún marcaje muerto  $M' \in [M_0]_p$ .

□

**Definición 5.14** (Ausencia de  $\beta$ -bloqueos)

Sea  $N = (P, T, F, W, \delta)$  una RPTR con marcaje inicial  $M_0$ , y  $\beta \in \mathbb{N}$ . Decimos que  $N$  *puede  $\beta$ -bloquearse* sii existe algún marcaje muerto  $M' \in [M_0]_p^\beta$ .

□

Todos estos problemas son decidibles en el caso de redes  $n$ -seguras. Ello es una consecuencia inmediata de que el conjunto de marcajes alcanzables es finito. Además, podemos codificar las RPTR  $n$ -seguras bajo la semántica del máximo paralelismo mediante redes no temporizadas.

**Definición 5.15** (Red de Petri Temporizada  $n$ -segura)

Sea  $N = (P, T, F, W, \delta)$  una RPTR con marcaje inicial  $M_0$ . Se dice que  $N$  es  $n$ -*segura* sii para todo marcaje  $M \in [M_0]_p$  se tiene:  $M_1(p) \leq n$ ,  $\forall p \in P$ .

Definimos además los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_n &= \{M \mid M \text{ es marcaje de } N \text{ verificando } M_1(p) \leq n, \forall p \in P, \text{ y} \\ &\quad M_2(t, \gamma) \leq n, \forall t \in T, \forall \gamma \leq \delta(t) - 1\} \\ \Pi_1(\mathcal{M}_n) &= \{M_1 \mid \exists M \in \mathcal{M}_n, M = (M_1, M_2)\}\end{aligned}$$

□

Una consecuencia inmediata de la definición anterior es que no pueden dispararse simultáneamente más de  $n$  instancias de una misma transición.

**Definición 5.16** (Codificación de las RPTR  $n$ -seguras bajo Máximo Paralelismo)  
Sea  $N = (P, T, F, W, \delta, M_0)$  una RPTRM  $n$ -segura. Se define la *red asociada a  $N$* ,  $N'' = (P'', T'', F'', W'', M_0'')$ , como sigue:

En primer lugar, dado  $V \in \Pi_1(\mathcal{M}_n)$ , denotaremos por  $R_V$  el conjunto de los multiconjuntos maximales de transiciones permitidos bajo el marcaje (ordinario)  $V$ . Definimos entonces el autómata de estados finitos que modela la conducta de  $N$ ,  $\mathcal{A} = (Q', \Sigma', \Theta', \delta', \Gamma', q_0)$ , de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}Q' &= \mathcal{M}_n \\ q_0 &= M_0 \\ \Sigma' &= \{R \mid R \in R_V, \text{ para } V \in \Pi_1(\mathcal{M}_n)\} \\ \Theta' &= \{A \mid A \text{ es un multiconjunto de transiciones en } T \text{ tal que } A(t) \leq n, \forall t \in T\} \\ \delta' : Q' \times \Sigma' &\longrightarrow Q'\end{aligned}$$

$\delta'(M, R)$  está definida sii  $R \in R_{M_1}$ . En tal caso:  $\delta'(M, R) = M'$ , donde  $M'$  es el marcaje alcanzado en  $N$  tras el disparo de  $R$  (puesto que la red es  $n$ -segura la definición es correcta).

$$\Gamma' : Q' \times \Sigma' \longrightarrow \Theta'$$

$\Gamma'(M, R) \doteq A$ , siendo

$$A(t) = \begin{cases} M_2(t, 1) & \forall t \in T \text{ tal que } M_2(t, 1) > 0 \\ R(t) & \forall t \in T \text{ tal que } \delta(t) = 1, \text{ y } R(t) > 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Los estados de este autómata son los posibles marcajes de la red, de los cuales hay una cantidad finita, pues ésta es  $n$ -segura. En consecuencia, el estado inicial

corresponde al marcaje inicial. Las entradas del autómata son los multiconjuntos maximales de transiciones permitidos, y las salidas son los multiconjuntos de transiciones que terminan su ejecución en el instante considerado. Las funciones  $\delta$  y  $\Gamma$  codifican la regla de activación.

Sea entonces  $N(\mathcal{A}) = (P', T', F', W', M'_0)$  la red que modela la conducta de este autómata. A partir de esta red construimos la red  $N''$  eliminando los lugares de entrada y salida (y los arcos conectados a ellos) que aparecen en la construcción de  $N(\mathcal{A})$ . Además añadimos un lugar *reloj* para contabilizar los pasos disparados.

$$P'' = Q' \cup \{\text{reloj}\}$$

$$T'' = T'$$

$$F'' = (F' - E_x) \cup \{(t', \text{reloj}) \mid t' \in T'\}, \text{ con } E_x \doteq \{(R, (M, R)) \mid R \in \Sigma', M \in Q'\} \\ \cup \{((M, R), A) \mid M \in Q', R \in \Sigma', A = \Gamma'(M, R)\}$$

$$W''(f) = 1, \text{ para todo } f \in F''$$

$$M''_0(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = q_0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

□

**Definición 5.17** (Correspondencia de marcajes)

Sea  $N = (P, T, F, W, \delta, M_0)$  una RPTRM  $n$ -segura. Sea  $N' = (P', T', F', W', M'_0)$  la Red asociada a ésta según la definición anterior. Definimos entonces la función siguiente:

$$\varphi_N^\beta : \mathcal{M}_n \longrightarrow \mathcal{M}'$$

$$\varphi_N^\beta(M)(p') \doteq \begin{cases} \beta & \text{si } p' = \text{reloj} \\ 1 & \text{si } p' = M \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

$\forall M = (M_1, M_2) \in \mathcal{M}_n, \forall p' \in P'$

□

**Teorema 5.1** Sea  $N = (P, T, F, W, \delta, M_0)$  una RPTRM  $n$ -segura y sea  $M \in \mathcal{M}_n$ . Sea  $N' = (P', T', F', W', M'_0)$  la Red asociada a ésta según la Def. 5.16. Entonces para cada  $\beta \in \mathbb{N}$  se tiene:

$$M[B]_p M' \text{ si y sólo si } \varphi_N^\beta(M) [(M, B)] \varphi_N^\beta(M')$$

**Demostración:** Supongamos que  $M[B]_p M'$ . En tal caso,  $\varphi_N^\beta(M)$  es un marcaje de  $N'$  que permitirá el disparo de la transición  $(M, B)$ , ya que por la definición de



$\varphi_N^\beta$  el lugar  $M \in P'$  de  $N'$  estará marcado, y este lugar es la única precondition de  $(M, B)$  (esta conexión existe por ser  $B$  un multiconjunto maximal de transiciones permitido bajo el marcaje  $M_1$ ) y por tanto, como hemos indicado, se permitirá el disparo de dicha transición. Ahora bien, tras el disparo de  $(M, B)$  en  $N'$  obtenemos un marcaje en  $N'$  en el cual estará marcado el lugar  $M' \in P'$  (estado siguiente en el autómata), por lo que:  $\varphi_N^\beta(M)[(M, B)]\varphi_N^\beta(M')$ .

Recíprocamente, supongamos que  $\varphi_N^\beta(M)[(M, B)]\varphi_N^\beta(M')$ . En tal caso, por la construcción de  $N'$ ,  $B$  debe ser un multiconjunto maximal de transiciones permitido bajo el marcaje  $M_1$ . En consecuencia, es posible su disparo a partir de  $M$  en  $N$ . El marcaje obtenido como consecuencia de ese disparo es  $M'$ , de nuevo por la construcción de  $N'$ .  $\square$

El teorema anterior nos permite definir la siguiente función, que captura la codificación de una RPTR en términos de una Red de Petri No Temporizada.

**Definición 5.18** Sea  $N = (P, T, F, W, \delta, M_0)$  una RPTRM n-segura. Definimos la siguiente función:

$$\begin{aligned} \psi_N : M(N, M_0) &\longrightarrow L'(N', M'_0) \\ \psi_N(\sigma) &\doteq \varphi_N^0(M_0)t'_1\varphi_N^1(M_1)t'_2 \dots t'_n\varphi_N^n(M_n) \end{aligned}$$

siendo  $t'_j = (M_{j-1}, R_j)$ , donde  $\sigma = M_0[R_1]_p M_1 \dots [R_n]_p M_n$ .  $\square$

**Corolario 5.1** Sea  $N = (P, T, F, W, \delta, M_0)$  una RPTRM n-segura. Sea  $N' = (P', T', F', W', M'_0)$  la Red asociada a ésta según la Def. 5.16. Entonces

$$M_0[\sigma^{(m)}]_p M_m \text{ si y sólo si } \varphi_N^0(M_0)[\psi_N(\sigma)]\varphi_N^m(M_m)$$

$\square$

Hemos visto que los problemas planteados son trivialmente decidibles para redes n-seguras con la semántica de máximo paralelismo. Ahora vamos a analizar estos problemas bajo esta semántica en el caso general, sin imponer ninguna restricción específica sobre el número de tokens que puede haber en cada lugar.

En principio, el problema de alcance estricto y la ausencia de  $\beta$ -bloqueos serán trivialmente decidibles, pues al no haber transiciones autónomas, es posible inspeccionar el árbol de accesibilidad hasta la profundidad  $\beta$ . Sin embargo, como vamos a demostrar a continuación, el problema de alcance es indecidible.

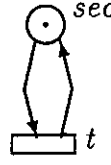


Figura 11: Conexión del lugar *sec* a todas las transiciones de la red de partida

Para ello vamos a presentar un esquema de codificación de las Redes de Petri con Arcos Inhibidores con una semántica de Secuencias de Ocurrencia en Redes de Petri Ordinarias con la semántica de Máximo Paralelismo. Como consecuencia de ello, puesto que el problema de alcance para las Redes con Arcos Inhibidores es indecidible (véase [Bra86]), el problema de alcance en Redes de Petri con la semántica del Máximo Paralelismo será indecidible, y en consecuencia, también será indecidible el mismo problema de alcance en Redes de Petri Temporizadas (las primeras son un caso especial de éstas).

**Definición 5.19** (Codificación de las Redes con Arcos Inhibidores en Redes de Petri con la semántica de Máximo Paralelismo) Sea  $N = (P, T, F, A, M_0)$  una Red de Petri con Arcos Inhibidores (conjunto  $A \subseteq P \times T$ ). Definimos la *Red Ordinaria asociada* (con la semántica de pasos con máximo paralelismo),  $N'$ , de la forma siguiente:

En primer lugar, para evitar problemas derivados de la semántica de máximo paralelismo, que podría no capturar adecuadamente la semántica de secuencias de ocurrencia de la red original, es conveniente secuencializar la red. Para ello incluimos un lugar *sec* conectando toda transición de la red original a dicho lugar según se indica en la fig. 11.

Este lugar *sec* estará inicialmente marcado con un token, por lo que en cada momento no permitirá nada más que el disparo de una transición (no obstante, la semántica ordinaria no se ve afectada en absoluto).

En segundo lugar vamos a añadir a la red original una serie de lugares y transiciones. Para cada lugar  $p \in P$  de la red original se añade un lugar  $p_{in}$  y una transición  $t_p$ , y se establecen las conexiones siguientes:  $(p_{in}, t_p)$ ,  $(p, t_p)$ ,  $(t_p, p)$ . Además, para todo  $t \in T$  tal que  $(p, t) \in A$  (el lugar  $p$  inhibe la transición  $t$ ) se elimina dicho arco inhibidor (parte (A) de la figura 12). Finalmente, para todo  $t \in T$

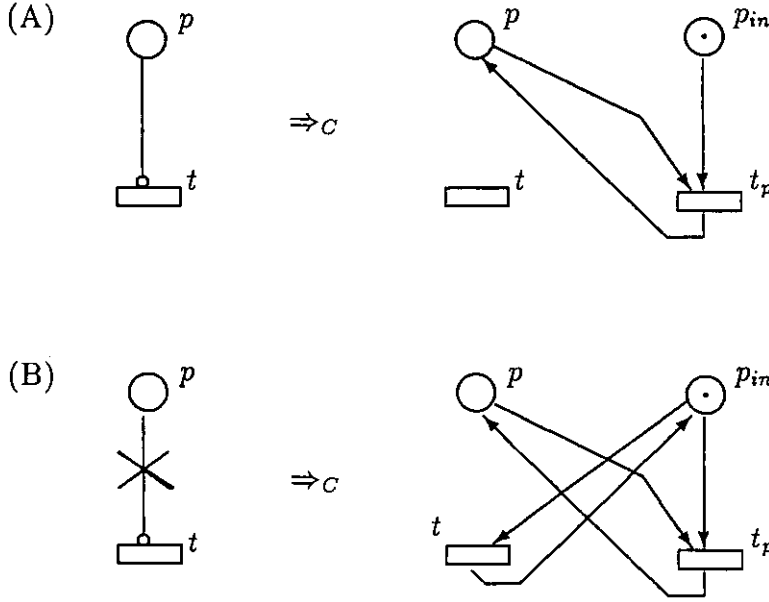


Figura 12: Codificación de una red con arcos inhibidores

tal que  $(p, t) \notin A$  (el lugar  $p$  no es inhibidor suyo) se establecen las conexiones  $(p_{in}, t)$ ,  $(t, p_{in})$  (parte (B) de la figura 12).

En definitiva,  $N' = (P', T', F', M'_0)$ , siendo:

$$\begin{aligned}
 P' &= P \cup P_{in} \cup \{sec\}, \quad \text{con } P_{in} = \{p_{in} \mid p \in P\} \\
 T' &= T \cup T_p, \quad \text{con } T_p = \{t_p \mid p \in P\} \\
 F' &= F \cup \{(p_{in}, t_p), (p, t_p), (t_p, p) \mid p \in P\} \cup \\
 &\quad \{(p_{in}, t), (t, p_{in}) \mid (p, t) \notin A\} \cup \{(sec, t), (t, sec) \mid t \in T\} \\
 M'_0(p') &= \begin{cases} M_0(p) & \text{si } p' = p \in P \\ 1 & \text{si } p' \in P_{in} \\ 1 & \text{si } p' = sec \end{cases}
 \end{aligned}$$

□

La red construida conserva los marcajes accesibles de la red con arcos inhibidores de partida. El resto de los marcajes accesibles en la red construida son fácilmente distinguibles, pues contienen algunos lugares  $p_{in}$  desmarcados; se tiene así pues una simulación de la red original.

**Teorema 5.2** Sea  $N = (P, T, F, A, M_0)$  una Red de Petri con Arcos Inhibidores (conjunto  $A \subseteq P \times T$ ) y sea  $N' = (P', T', F', M'_0)$  la red asociada según la definición

anterior. Entonces  $M$  es un marcaje accesible de  $N$  si y sólo si el marcaje  $M'$  definido por  $M'|_P = M$ ,  $M'(sec) = 1$  y  $M'|_{P_{in}} = 1$  (como vector cuyas componentes son todas ellas iguales a 1) es accesible en  $N'$ .

**Demostración:** Basta tener en cuenta las siguientes consideraciones. En principio, la presencia del lugar  $sec$  impide el disparo simultáneo de varias transiciones de  $T$  en  $N'$ . No obstante, la hipótesis de máximo paralelismo obliga a disparar (en  $N'$ ) junto a una transición de  $t$ , aquellas transiciones  $t_p$  que estén permitidas. Para cada transición  $t \in T$  se considera el conjunto de lugares  $I(t)$  que inhiben a  $t$ :  $I(t) = \{p \in P \mid (p, t) \in A\}$ . Entonces, pueden presentarse los siguientes casos:

1. Si la transición no está permitida en  $N$  debido únicamente a la presencia de tokens en algunos lugares  $p_i \in I(t)$ , entonces sin la presencia de los arcos inhibidores  $(p_i, t)$  estaría permitida en  $N$ . Esta transición estará permitida en  $N'$ , si bien su disparo irá necesariamente acompañado (máximo paralelismo) del disparo de las transiciones  $t_{p_i}$  (pues los lugares  $p_i$  están marcados). Tras ello se obtendría un marcaje de  $N'$  en el que  $p_{i_{in}}$  está desmarcado. Nótese además que cuando un lugar  $p_{in}$  se desmarca, entonces no puede ya recuperar su token, quedando definitivamente desmarcado. Es decir, tras el disparo de la transición  $t$  sólo son accesibles en  $N'$  marcajes que no cumplen la condición de que todos los lugares en  $P_{in}$  están marcados con un token.
2. Si la transición  $t$  está permitida en  $N$ , entonces todos los lugares  $p \in I(t)$  deben estar desmarcados. En consecuencia, las transiciones  $t_p$  (para  $p \in I(t)$ ) no pueden ser disparadas. De esta forma, esta transición  $t$  deberá dispararse sola en  $N'$  (está conectada a todos los  $s_{in}$  tales que el lugar  $s$  no inhibe a  $t$ ). En consecuencia, una vez disparada dicha transición, cada lugar  $s_{in}$  recupera su token y se obtiene un marcaje que proyectado sobre  $P$  coincide con el obtenido en  $N$  tras el disparo de  $t$ .

□

Hemos probado que toda red con arcos inhibidores puede ser simulada por la red ordinaria asociada (sin arcos inhibidores), con su semántica de máximo paralelismo. Como consecuencia de ello concluimos que el problema de alcance en redes de Petri Ordinarias con la semántica de máximo paralelismo es indecidible.

**Corolario 5.2** El problema de alcance para Redes de Petri Ordinarias con la semántica de Máximo Paralelismo es indecidible. El problema de Alcance para Redes de Petri Generalizadas (con un vector de pesos arbitrario) con la semántica de máximo paralelismo es indecidible.

**Demostración:** La primera consideración es una consecuencia inmediata de la indecidibilidad del problema de alcance en redes con arcos inhibidores (véase [Bra86]) y de la construcción de la Def. 5.19. La segunda es trivial, dado que las redes ordinarias son un subconjunto de las Redes de Petri Generalizadas.  $\square$

**Corolario 5.3** El problema de Alcance para Redes de Petri Temporizadas con la semántica de máximo paralelismo es indecidible.

**Demostración:** Inmediata, dado que las Redes de Petri Generalizadas son un subconjunto de las Redes de Petri Temporizadas (considerando duración 1 para todas las transiciones).  $\square$

La construcción anterior nos ha permitido codificar las redes con arcos inhibidores mediante redes ordinarias bajo máximo paralelismo. De manera natural surge la pregunta de si podremos encontrar una construcción que nos permita codificar las redes con máximo paralelismo mediante redes con arcos inhibidores. Efectivamente, tal construcción existe, presentándose a continuación en dos pasos. En primer lugar planteamos la construcción para el caso de Redes de Petri Ordinarias con la semántica de Máximo Paralelismo, y posteriormente analizamos las modificaciones necesarias para adaptar esta construcción a Redes de Petri Temporizadas.

**Definición 5.20** (Codificación de Redes de Petri con Máximo Paralelismo en Redes con Arcos Inhibidores) Sea  $N = (P, T, F, W, M_0)$  una Red de Petri Marcada con la semántica de Máximo Paralelismo tal que toda transición  $t \in T$  verifica  $\bullet t \neq \emptyset$ . Se define la *Red de Petri con Arcos Inhibidores asociada a  $N$*  siguiendo la siguiente construcción:

En primer lugar, numeramos las transiciones de  $T$ ,  $T = \{t_1, \dots, t_n\}$ , y aplicamos para cada una de ellas un test que nos permita determinar si dicha transición está permitida bajo el marcaje actual. Es precisamente para realizar este test para lo que usamos los arcos inhibidores. Una vez realizados estos tests, conoceremos

si existe alguna transición que pueda ser disparada en el momento actual. De entre estas posibles transiciones se disparará una de ellas, sustrayendo los tokens correspondientes de sus lugares precondition. Sin embargo, todavía no se actualiza el número de tokens de los lugares postcondición, sino que se realiza de nuevo el test para determinar si pueden dispararse otras transiciones. De esta forma, se repite este razonamiento hasta que el test determine que ya no puede dispararse ninguna transición más. En ese momento se actualizan los lugares postcondición de las transiciones disparadas y se da por terminada la simulación de un paso de la red original. Este esquema de codificación conseguirá de esta forma reflejar la semántica de máximo paralelismo, pues un ciclo de simulación no termina hasta que no puedan dispararse transiciones, lo cual corresponde a un paso de la red original.

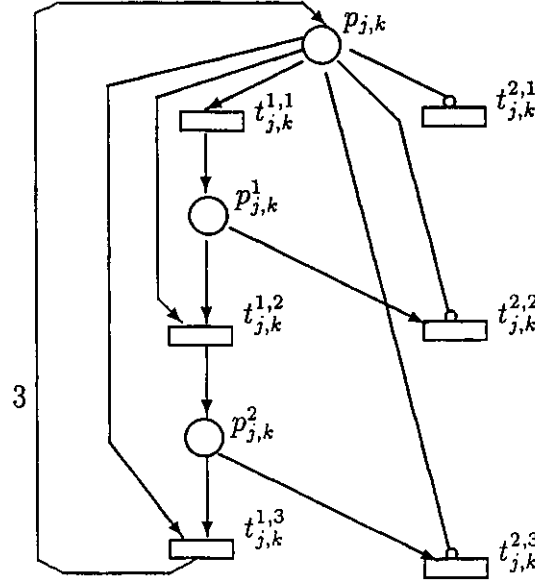
Por ello, consideramos un lugar especial *medias*, el cual indica si hay o no un paso en mitad de ejecución. Es decir, cuando este lugar esté desmarcado nos indicará que se está simulando un paso de la red original. A partir de este lugar hay que lanzar las siguientes actividades:

1. En primer lugar se hace el test de las transiciones, para determinar si hay transiciones disparables.
2. Si hay transiciones disparables se dispara una de ellas, retornándose al paso (1).
3. Si no hay transiciones disparables se restauran los tokens pendientes y se recupera el token sobre el lugar *medias*.

Vamos a construir la Red de Petri con arcos inhibidores buscada de una forma gradual, planteando la forma de realizar cada una de estas actividades, e integrando las redes obtenidas progresivamente.

En principio, para realizar los tests se consideran los lugares precondition de cada transición  $t_j$ ,  $\bullet t_j = \{p_{j,1}, \dots, p_{j,r_j}\}$ , y para cada  $k = 1, \dots, r_j$  se construye la siguiente red con arcos inhibidores (en función del valor  $n_{j,k} = W(p_{j,k}, t_j)$ ):

$$N_{j,k} = (P_{j,k}, T_{j,k}, F_{j,k}, A_{j,k}, W_{j,k})$$

Figura 13: Red  $N_{j,k}$  para  $n_{j,k} = 3$ 

siendo:

$$\begin{aligned}
 P_{j,k} &= \{p_{j,k}\} \cup \{p_{j,k}^i \mid i = 1, \dots, n_{j,k} - 1\} \\
 T_{j,k} &= \{t_{j,k}^{1,i} \mid i = 1, \dots, n_{j,k}\} \cup \{t_{j,k}^{2,i} \mid i = 1, \dots, n_{j,k}\} \\
 F_{j,k} &= \{(t_{j,k}^{1,n_{j,k}}, p_{j,k})\} \cup \{(p_{j,k}, t_{j,k}^{1,i}) \mid i = 1, \dots, n_{j,k}\} \cup \\
 &\quad \{(p_{j,k}^i, t_{j,k}^{1,i+1}) \mid i = 1, \dots, n_{j,k} - 1\} \cup \\
 &\quad \{(p_{j,k}^i, t_{j,k}^{2,i+1}) \mid i = 1, \dots, n_{j,k} - 1\} \cup \\
 &\quad \{(t_{j,k}^{1,i}, p_{j,k}^i) \mid i = 1, \dots, n_{j,k} - 1\} \\
 A_{j,k} &= \{(p_{j,k}, t_{j,k}^{2,i}) \mid i = 1, \dots, n_{j,k}\} \\
 W_{j,k}(f) &= \begin{cases} n_{j,k} & \text{si } f = (t_{j,k}^{1,n_{j,k}}, p_{j,k}) \\ 1 & \text{en caso contrario, con } f \in F_{j,k} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Por ejemplo, para  $n_{j,k} = 3$  se obtendría la red de la figura 13.

Una vez construidas estas  $r_j$  redes se considera la red siguiente,  $N_j$ , obtenida componiendo dichas redes y añadiendo unos lugares  $s_j$ ,  $SI(p_{j,k})$ .

$$N_j = (P_j, T_j, F_j, A_j, W_j)$$

siendo:

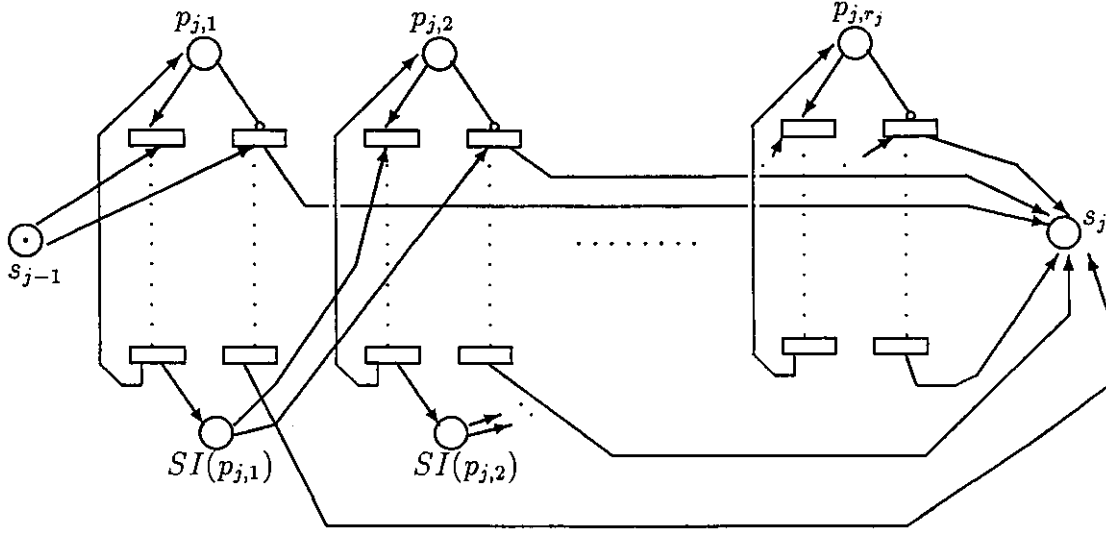
$$\begin{aligned}
 P_1 &= \bigcup_{k=1}^{r_1} P_{1,k} \cup \{s_0, s_1\} \cup \{SI(p_{1,k}) \mid k = 1, \dots, r_1 - 1\} \\
 P_j &= \bigcup_{k=1}^{r_j} P_{j,k} \cup \{s_j\} \cup \{SI(p_{j,k}) \mid k = 1, \dots, r_j - 1\} \text{ para } j = 2, \dots, n \\
 T_j &= \bigcup_{k=1}^{r_j} T_{j,k} \\
 F_j &= \bigcup_{k=1}^{r_j} F_{j,k} \cup \{(t_{j,k}^{1,n_j,k}, SI(p_{j,k})) \mid k = 1, \dots, r_j - 1\} \cup \\
 &\quad \{(s_{j-1}, t_{j,1}^{1,1}), (s_{j-1}, t_{j,1}^{2,1})\} \cup \{(t_{j,k}^{2,i}, s_j) \mid k = 1, \dots, r_j, i = 1, \dots, n_{j,k}\} \cup \\
 &\quad \{(SI(p_{j,k}), t_{j,k+1}^{1,1}), (SI(p_{j,k}), t_{j,k+1}^{2,1}) \mid k = 1, \dots, r_j - 1\} \\
 A_j &= \bigcup_{k=1}^{r_j} A_{j,k} \\
 W_j(f) &= \begin{cases} W_{j,k}(f) & \text{si } f \in F_{j,k} \\ 1 & \text{en otro caso, con } f \in F \end{cases}
 \end{aligned}$$

Obsérvese la importancia que adquiere el token de control (token que colocaremos en cada lugar  $s_j$  para comenzar a testear cada transición  $t_j$ ). Este token se encontrará en  $s_0$  en el momento de comenzar el test, y es el encargado de regular el desarrollo del mismo. Cada vez que se termina de testear una precondition de una transición, este token indica cómo debe continuar el test. En concreto, si la precondition testada no tiene suficientes tokens para permitir la activación de  $t_j$ , este token se encontrará en  $s_j$  (para permitir la activación del test correspondiente a  $t_{j+1}$ ). Si, por el contrario, dicho lugar tiene suficientes tokens para permitir la activación de  $t_j$ , entonces el token se encontrará en el lugar  $SI(p_{j,k})$  (para iniciar el test correspondiente a la siguiente precondition). Finalmente, si llegamos a testear la última precondition de  $t_j$ , y ésta resulta suficientemente marcada, entonces se detiene el test, ya que no llevamos el token de control a ningún sitio. En esta situación hay al menos una transición permitida, lo que posteriormente reflejaremos en un nuevo lugar SI.

En definitiva, esta red codifica una conectiva lógica AND relacionando los marcajes de todas las preconditiones de  $t_j$ . La figura 14 contiene la representación gráfica de la misma.

El paso siguiente consiste en componer adecuadamente las  $n$  redes así obtenidas. Esta composición codificará una conectiva lógica OR relacionando las  $n$  transiciones. Como ya hemos indicado anteriormente incluiremos un nuevo lugar SI,



Figura 14: Red  $N_j$ 

que nos indicará (una vez concluido el test) si hay alguna transición permitida. Es precisamente a este lugar donde enviamos el token de control cuando una transición está permitida (de esta forma implementamos la conectiva OR). Además, el lugar  $s_n$  nos indica el momento en el que ya no pueden dispararse más transiciones. Ello se debe a que la única forma de llegar a él es cuando ninguna transición está permitida.

La red resultante de esta nueva composición de redes es la siguiente (figura 15):  $TEST = (P_T, T_T, F_T, A_T, W_T)$ , siendo:

$$P_T = \{medias, SI\} \cup \bigcup_{j=1}^n P_j$$

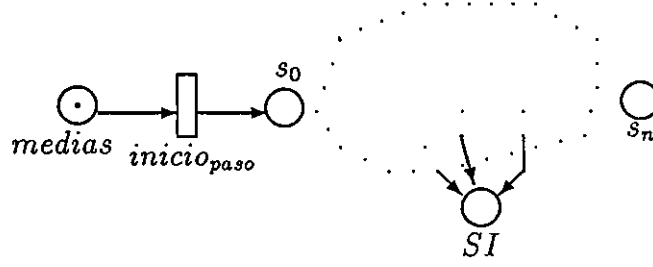
$$T_T = \{inicio_{paso}\} \cup \bigcup_{j=1}^n T_j$$

$$F_T = \{(medias, inicio_{paso}), (inicio_{paso}, s_0)\} \cup \bigcup_{j=1}^n \{(t_{j,r_j}^{1,n_j,r_j}, SI)\} \cup \bigcup_{j=1}^n F_j$$

$$A_T = \bigcup_{j=1}^n A_j$$

$$W_T(f) = \begin{cases} W_j(f) & \text{si } f \in F_j \\ 1 & \text{en caso contrario, con } f \in F_T \end{cases}$$

El lugar *medias*, que inicialmente está marcado, indica el comienzo de un ciclo de simulación (correspondiente a un paso de la red original). En concreto, a partir de este lugar se disparará la transición *inicio<sub>paso</sub>*, lanzando así el test. Una vez

Figura 15: Red *TEST*

concluido el test obtendremos un token en el lugar *SI* o en el lugar  $s_n$ . De esta forma conoceremos si hay alguna transición disparable. En ese caso, el lugar *SI* habrá quedado marcado, y debe permitirse el disparo de alguna de las transiciones de la red.

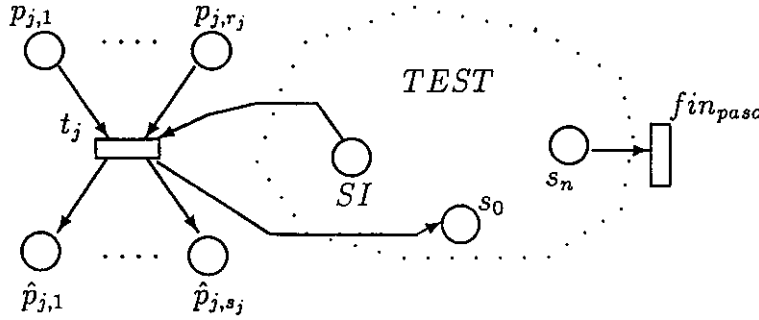
De esta forma, entramos en la segunda parte de la simulación, que consiste en ir disparando las transiciones permitidas, pero guardándonos los tokens generados en algún sitio intermedio (para poder simular correctamente el máximo paralelismo).

De entre las transiciones permitidas, una de ellas será disparada, y los tokens que se generarían sobre sus lugares postcondiciones se guardan en unos lugares duplicados. Cada vez que se dispara una transición es necesario volver a realizar el test, ya que puede haber situaciones de conflicto. Por tanto, tras la ejecución de cada transición de la red de partida enviamos un token al lugar  $s_0$ .

Definimos entonces la red  $\tilde{N} = (\tilde{P}, \tilde{T}, \tilde{F}, \tilde{A}, \tilde{W})$ , de la forma siguiente (figura 16):

$$\begin{aligned}
 \tilde{P} &= P_T \cup \hat{P}, \text{ siendo } \hat{P} = \{\hat{p} \mid p \in P\} \\
 \tilde{T} &= T_T \cup T \cup \{fin_{paso}\} \\
 \tilde{F} &= F_T \cup F|_{P \times T} \cup \{(SI, t_j), (t_j, s_0) \mid t_j \in T\} \cup \\
 &\quad \{(t_j, \hat{p}) \mid (t_j, p) \in F\} \cup \{(s_n, fin_{paso})\} \\
 \tilde{A} &= A_T \\
 \tilde{W}(f) &= \begin{cases} W_T(f) & \text{si } f \in F_T \\ W(f) & \text{si } f \in F \\ W(t_j, p) & \text{si } f = (t_j, \hat{p}) \\ 1 & \text{en caso contrario, con } f \in \tilde{F} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Cuando el test determine que ninguna transición puede ser disparada, entonces sólo podrá dispararse la transición  $fin_{paso}$  ( $s_n$  estará entonces marcado). Con su

Figura 16: Red  $\tilde{N}$ 

disparo pasamos a la tercera etapa de la simulación, que consiste en recuperar los tokens que se encuentran en los lugares duplicados. Con tal fin, se considera la red  $N' = (P', T', F', W', A', M'_0)$ , definida como sigue (figura 17):

$$\begin{aligned}
 P' &= \tilde{P} \cup \{c\} \\
 T' &= \tilde{T} \cup \{\hat{t}_p \mid p \in P\} \cup \{term\} \\
 F' &= \tilde{F} \cup \{(\hat{p}, \hat{t}_p), (\hat{t}_p, p) \mid p \in P\} \cup \{(c, \hat{t}_p), (\hat{t}_p, c) \mid p \in P\} \cup \\
 &\quad \{(c, term), (term, medias), (fin_{paso}, c)\} \\
 W'(f) &= \begin{cases} \tilde{W}(f) & \text{si } f \in \tilde{F} \\ 1 & \text{en caso contrario, con } f \in F' \end{cases} \\
 A' &= \tilde{A} \cup \{(\hat{p}, term) \mid p \in P\} \\
 M'_0(p) &= \begin{cases} M(p) & \text{si } p \in P \\ 1 & \text{si } p = medias \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Una vez disparada la transición  $fin_{paso}$ , se procede a recuperar los tokens de los lugares  $\hat{p}$ . Sólo cuando todos ellos estén vacíos se permite el disparo de la transición  $term$ , que marca el fin de la simulación de un paso.  $\square$

**Corolario 5.4** Toda Red de Petri Temporizada con la semántica de Máximo Paralelismo puede ser codificada en términos de una Red de Petri Ordinaria con Arcos Inhibidores.

**Demostración:** Basta reemplazar cada transición  $t$  de la red de partida por  $\delta(t)$  transiciones de duración 1 (veáse fig. 18). En este caso, la hipótesis de máximo



al estado  $e_{fin}$ . Las líneas del programa, que se denotarán de la forma *estado: instrucción*, sólo pueden ser de 2 tipos:

1.  $e_i : r_j := r_j + 1$ ; ir a  $e_k$
2.  $e_i : \text{si } r_j = 0 \text{ ir a } e_k \text{ sino } r_j := r_j - 1$ ; ir a  $e_n$

Una ejecución del programa comienza en una instrucción etiquetada con  $e_0$ , y si termina, lo hace en la instrucción etiquetada con  $e_{fin}$ . La máquina se dice que es determinista si para cada etiqueta  $e_i \neq e_{fin}$  hay una única instrucción  $i_k$  tal que  $e_i : i_k$  es una línea del programa. En caso contrario, se dice que es no-determinista.

Recordemos que la semántica de una máquina de registros es el conjunto de computaciones que induce. Estas computaciones se definen usando vectores de estado de la forma  $(e, \bar{r})$ , donde  $e \in E$  y  $\bar{r} \in \mathbb{N}^{|R|}$ . La primera componente es el estado de la máquina, y  $\bar{r}$  son los valores actuales de los registros de la máquina.

Entonces, el vector de estado inicial es el vector de estado para el cual  $e = e_0$  y  $r_j = 0, \forall j \in \{1, \dots, |R|\}$ , siendo  $\bar{r} = (r_1, \dots, r_{|R|})$ .

Un vector de estado  $(e, \bar{r})$  puede transformarse en un vector de estado  $(e', \bar{r}')$ , lo que se denota por  $(e, \bar{r}) \vdash_M (e', \bar{r}')$  si y sólo si ocurre una de las siguientes condiciones:

- Existe  $p = (e, i) \in P$ , siendo  $i \equiv e : r_j := r_j + 1$ ; ir a  $e'$ , y se tiene  $r'_h = r_h$ , para  $h = 1, \dots, |R|$ ,  $h \neq j$ , y  $r'_j = r_j + 1$ .
- Existe  $p = (e, i) \in P$ , siendo  $i \equiv e : \text{si } r_j = 0 \text{ ir a } e' \text{ sino } r_j := r_j - 1$ ; ir a  $e''$ , con  $r_j = 0$ ,  $r'_h = r_h$ , para  $h = 1, \dots, |R|$ .
- Existe  $p = (e, i) \in P$ , siendo  $i \equiv e : \text{si } r_j = 0 \text{ ir a } e'' \text{ sino } r_j := r_j - 1$ ; ir a  $e'$ , con  $r_j \neq 0$ ,  $r'_h = r_h$ , para  $h = 1, \dots, |R|$ ,  $h \neq j$  y  $r'_j = r_j - 1$ .

Una computación es una secuencia de vectores de estado de la forma  $(e_0, \bar{r}_0) \vdash_M (e_1, \bar{r}_1) \vdash_M \dots (e_n, \bar{r}_n)$ , siendo  $(e_0, \bar{r}_0)$  el vector de estado inicial.  $\square$

Una máquina de registros  $M$  puede ser codificada mediante una Red de Petri Temporizada con la semántica de Máximo Paralelismo (incluso con la semántica débil y con la semántica débil conjuntista, pues no necesitamos multiconjuntos de transiciones para ello) de la forma indicada en la siguiente definición.

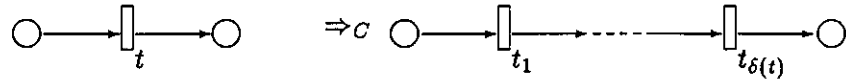


Figura 18: Reemplazamiento de cada transición  $t$  de la red de partida por  $\delta(t)$  transiciones

**Definición 5.22** Sea  $M = (R, P, E)$  una máquina de registros. Podemos asociar a  $M$  una Red de Petri Ordinaria Temporizada Marcada de la forma siguiente:

1. A cada registro  $r_j$  le asociamos un lugar  $p_{r_j}$ .
2. A cada etiqueta  $e_i$  le asociamos un lugar  $p_{e_i}$ .
3. Cada instrucción de la forma  $e_i : r_j := r_j + 1$ ; ir a  $e_k$  se codifica de la forma indicada en la figura 19.
4. Cada instrucción de la forma  $e_i : \text{si } r_j = 0 \text{ ir a } e_k \text{ sino } r_j := r_j - 1$ ; ir a  $e_n$  se codifica de la forma indicada en la figura 20.

Todas las transiciones llevan asociada una duración de una unidad de tiempo.

Entonces, a cada vector de estado  $(e, \bar{r})$  le asociamos el marcaje  $\varphi(e, \bar{r})$  en  $N$ , definido de la forma siguiente:

$$\varphi(e, \bar{r})(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = p_e \vee p = s(e_i, e_k, e_n, r_j) \\ r_j & \text{si } p = p_{r_j} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

□

**Teorema 5.3** Sea  $M = (R, P, E)$  una máquina de registros,  $N$  la Red de Petri Ordinaria Temporizada Marcada asociada a  $M$  según la definición anterior y  $(e, \bar{r}), (e', \bar{r}')$  vectores de estado de  $M$ . Entonces  $(e, \bar{r}) \vdash_M (e', \bar{r}')$  si y sólo si existe una secuencia de pasos  $\sigma$  en  $N$  (con la semántica de máximo paralelismo débil conjuntista) tal que contiene una única transición en  $P_E^\bullet$ , siendo  $P_E = \{p_e \mid e \in E\}$  y  $\varphi(e, \bar{r})[\sigma] \varphi(e', \bar{r}')$ .

**Demostración:**

$\Rightarrow$ : Si  $(e, \bar{r}) \vdash_M (e', \bar{r}')$ , entonces pueden darse 3 casos:

- Existe  $p = (e, i) \in P$ , con  $i \equiv e : r_j := r_j + 1$ ; ir a  $e'$ ,  $r'_h = r_h$ , para  $h = 1, \dots, |R|$ ,  $h \neq j$  y  $r'_j = r_j + 1$ . Entonces basta tomar  $\sigma = \psi_1(e, e', r_j)$ .

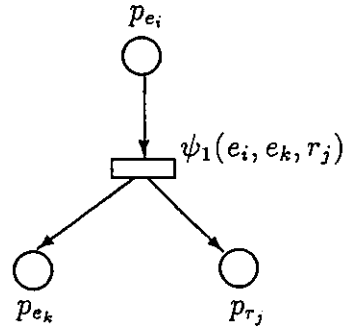


Figura 19: Codificación de la instrucción  $e_i : r_j := r_j + 1$ ; ir a  $e_k$

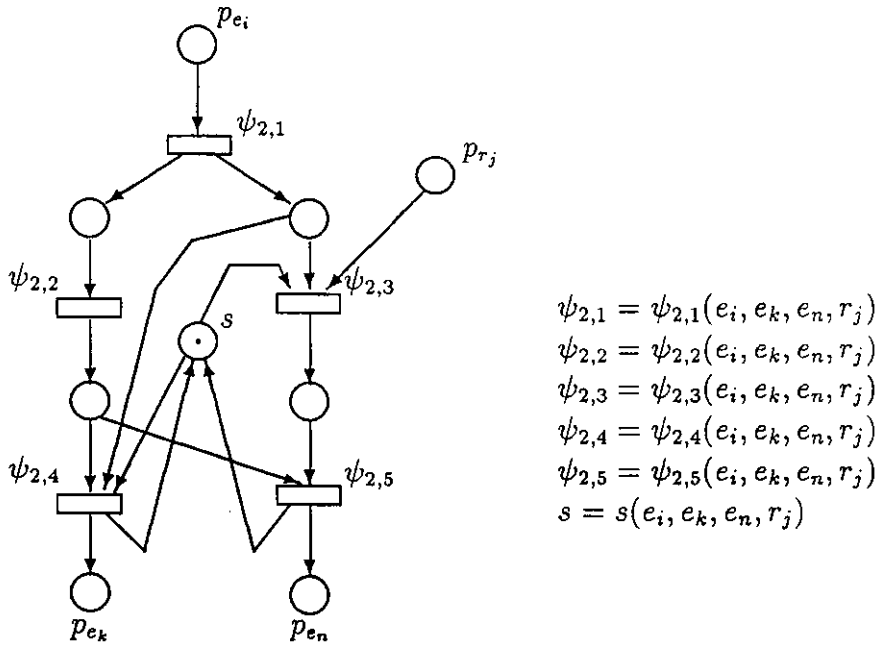


Figura 20: Codificación de la instrucción  $e_i : \text{si } r_j = 0 \text{ ir a } e_k \text{ sino } r_j := r_j - 1$ ; ir a  $e_n$

- Existe  $p = (e, i) \in P$ , con  $i \equiv e$  : si  $r_j = 0$  ir a  $e'$  sino  $r_j := r_j - 1$ ; ir a  $e''$ ,  $r_j = 0$ ,  $r'_h = r_h$ , para  $h = 1, \dots, |R|$ . Entonces basta tomar la secuencia  $\sigma = \{\psi_{2,1}(e, e', e'', r_j)\} \{\psi_{2,2}(e, e', e'', r_j)\}, \{\psi_{2,4}(e, e', e'', r_j)\}$ .
- Existe  $p = (e, i) \in P$ , con  $i \equiv e$  : si  $r_j = 0$  ir a  $e''$  sino  $r_j := r_j - 1$ ; ir a  $e'$ ,  $r_j \neq 0$ ,  $r'_h = r_h$ , para  $h = 1, \dots, |R|$ ,  $h \neq j$  y  $r'_j = r_j - 1$ . Entonces basta tomar la secuencia  $\sigma = \{\psi_{2,1}(e, e'', e', r_j)\} \{\psi_{2,2}(e, e'', e', r_j), \psi_{2,3}(e, e'', e', r_j)\}, \{\psi_{2,5}(e, e'', e', r_j)\}$ .

$\Leftarrow$ : Una secuencia  $\sigma$  que cumpla las condiciones del enunciado sólo puede ser de una de las tres formas indicadas en la prueba del sentido directo, las cuales se corresponden de forma inmediata con las instrucciones de la máquina de registros.

□

Una primera propiedad cuya indecidibilidad puede ser demostrada a partir de esta construcción es el alcance nulo de un lugar, que será utilizada para demostrar la indecidibilidad de algunas de las propiedades planteadas.

**Proposición 5.1** Dada una RPTRM  $N$  (con la semántica de Máximo Paralelismo) y un lugar de la misma  $s$ , no es posible decidir la existencia de un marcaje alcanzable  $M$  bajo dicha semántica tal que  $M_1(s) = 0$ .

**Demostración:** Se considera la codificación anterior. Si la citada propiedad fuera decidible, podríamos decidir el problema de parada, incluyendo un lugar en la simulación que quede desmarcado una vez que la máquina se pare. En consecuencia, la propiedad de alcance nulo de un lugar es indecidible para redes con máximo paralelismo.

Dicha propiedad es también indecidible para la semántica de Máximo Paralelismo Débil, y para la semántica de Máximo Paralelismo Débil Conjuntista, ya que la codificación anterior funciona también bajo estas semánticas.

□

**Proposición 5.2** La ausencia de bloqueos es indecidible para RPTR con la semántica de Máximo Paralelismo.

**Demostración:** Hemos visto que podemos codificar una máquina de registros mediante RPTR con la semántica de Máximo Paralelismo. Una máquina de registros sólo se bloquea cuando llega al final del programa. Por tanto, si la ausencia



de bloqueos fuese decidible para RPTR, también sería decidible la parada de una máquina de registros, lo que es absurdo. En consecuencia, la ausencia de bloqueos es indecidible para RPTR con la semántica de Máximo Paralelismo.  $\square$

**Proposición 5.3** La ilimitación es indecidible para RPTR con la semántica de Máximo Paralelismo.

**Demostración:** De nuevo se hace uso de la codificación presentada de las máquinas de registros. Basta añadir un lugar a la codificación, que gana un token con la simulación de la ejecución de cada instrucción de la máquina. De esta forma, si la ilimitación fuese decidible, también sería decidible la parada de la máquina, pues sólo podríamos ejecutar un número finito de instrucciones.  $\square$

**Proposición 5.4** La  $s$ -ilimitación uniforme es indecidible para RPTR con la semántica de Máximo Paralelismo.

**Demostración:** Consideramos redes sin tiempo con la semántica de máximo paralelismo débil conjuntista. Sea entonces  $N = (P, T, F, W, M_0)$  una red arbitraria con la semántica débil conjuntista, y  $p \in P$  un lugar de la misma. Construimos la red  $N' = (P', T', F', W', M'_0)$ , de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 P' &= P \cup \{s_t \mid t \in T\} \cup \{s_1, s_2\} \\
 T' &= T \cup \{t_1, t_2\} \\
 F' &= F \cup \{(t, s_t), (s_t, t) \mid t \in T\} \cup \{(t_2, s_2), (s_2, t_1), \\
 &\quad (t_1, s_2), (p, t_1), (t_1, p), (t_1, s_1)\} \\
 W'(f') &= \begin{cases} W(f') & \text{si } f' \in F \\ 2 & \text{si } f' = (t_1, s_1) \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases} \\
 M'_0(p') &= \begin{cases} M_0(p') & \text{si } p' \in P \\ 1 & \text{si } p' = s_t, \text{ para } t \in T \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Esta red está representada gráficamente en la figura 21. Con esta construcción reducimos el problema a un problema de alcance nulo de un lugar, que hemos visto que es indecidible.

Para ello, sea  $M$  un marcaje alcanzable de la red de partida  $N$ . A dicho marcaje le podemos asociar el marcaje  $\varphi(M)$  en la red  $N'$ , construida según la

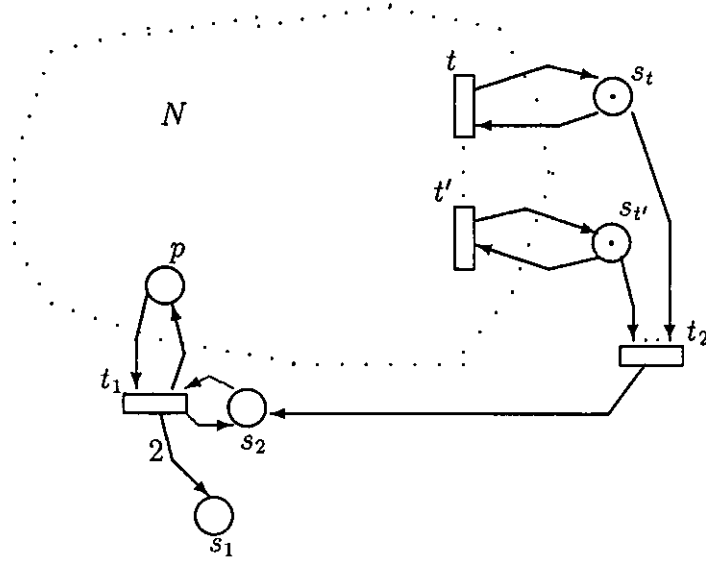
Figura 21: Red  $N'$ 

figura anterior, definido como sigue:

$$\varphi(M)(p') = \begin{cases} M(p') & \text{si } p' \in P \\ 1 & \text{si } p' = s_t, \text{ para algún } t \in T \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Dado un paso  $M[R]_{pdc}M'$  sobre la red de partida, el paso  $\varphi(M)[R]_{pdc}\varphi(M')$  puede ser ejecutado en  $N'$ , ya que los lugares  $s_t$  contienen todos ellos un token, y  $R$  es un conjunto de transiciones (es una restricción impuesta por la semántica de Máximo Paralelismo Débil Conjuntista). Es importante notar que para que ello sea cierto es esencial que el marcaje del lugar  $s_2$  sea nulo, porque en caso contrario, la semántica de Máximo Paralelismo Débil Conjuntista nos obligaría a disparar la transición  $t_1$  si el lugar  $p$  estuviera marcado, lo que podría alterar la semántica de la red de partida (estaríamos permitiendo a  $N'$  “congelar” tokens de  $p$ ). Por tanto, si en  $N$  existe un marcaje  $M$  alcanzable en el que el lugar  $p$  está desmarcado, entonces el marcaje  $\varphi(M)$  será alcanzable en  $N'$ . Disparando sobre dicho marcaje la transición  $t_2$  bloquearemos la red  $N'$ , con lo cual no será  $s_1$ -ilimitada uniformemente.

Recíprocamente, si el lugar  $s_1$  no es uniformemente ilimitado en  $N'$ , entonces no puede existir un marcaje alcanzable en  $N'$  bajo el cual la transición  $t_1$  pueda ser disparada, pues si dicha transición puede ser disparada en algún momento,

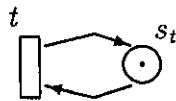


Figura 22: Lugar asociado a cada transición

entonces los lugares  $s_2$  y  $p$  tendrían que estar marcados, y en consecuencia todos los lugares  $s_i$  estarían desmarcados. En esa situación la transición  $t_1$  podría ser disparada infinitas veces, lo que nos conduciría a una contradicción con el hecho de no ser el lugar  $s_1$  uniformemente ilimitado, pues gana tokens más deprisa que el transcurso del tiempo (en cada unidad de tiempo gana 2 tokens).

Tenemos pues que  $s_1$  es uniformemente ilimitado si y sólo si  $p$  no puede desmarcarse en  $N$ , de lo que se deduce que dicha propiedad es indecidible para Redes de Petri Temporizadas con la semántica de Máximo Paralelismo Débil Conjuntista. Sin embargo, de esta indecidibilidad es fácil concluir la indecidibilidad también para la semántica de Máximo Paralelismo, pues si cogemos una Red  $N$  con la semántica débil conjuntista y a cada transición se le añade un lugar asociado conectado a ella tal como se indica en la figura 22, entonces la semántica débil conjuntista coincide con la de Máximo Paralelismo. Por tanto, si el problema fuese decidable con la semántica de Máximo Paralelismo, también lo sería con la semántica débil conjuntista, lo que es absurdo, tal como hemos visto.  $\square$

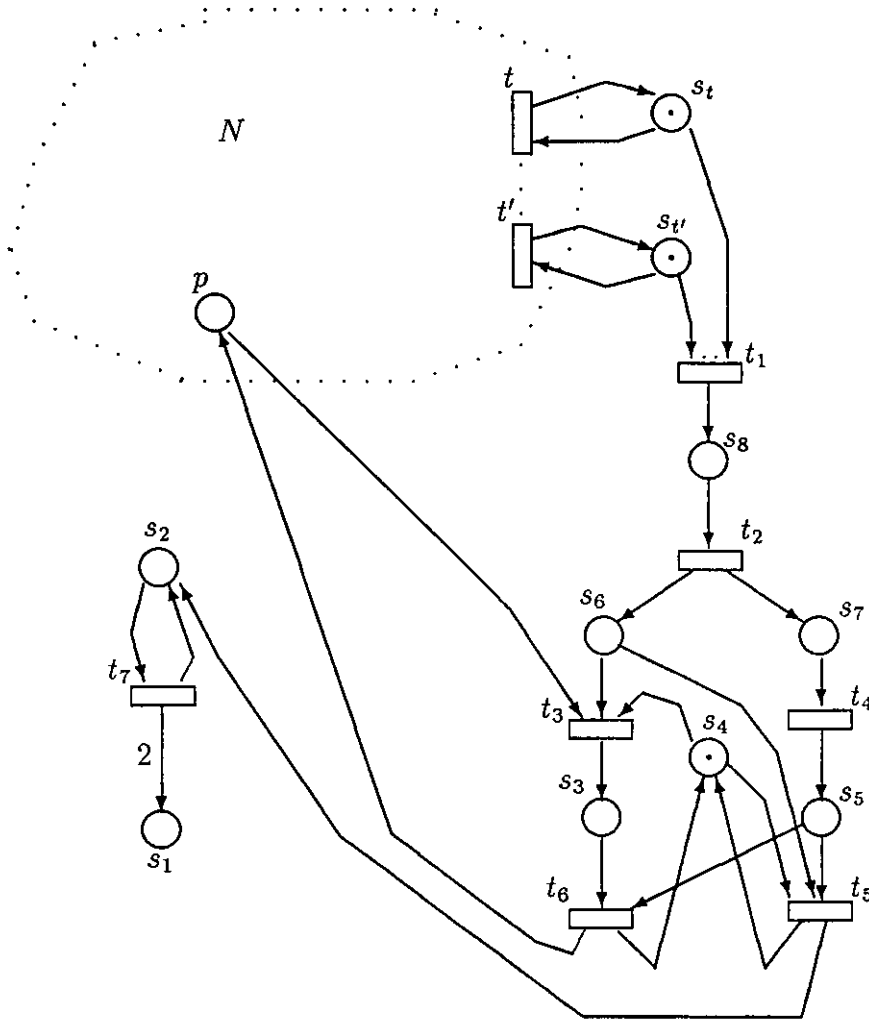
**Proposición 5.5** La  $s, k$ -ilimitación lineal es indecidible para RPTR con la semántica de Máximo Paralelismo.

**Demostración:** Consideramos de nuevo redes con la semántica débil conjuntista. De nuevo tomamos un lugar cualquiera  $p$  en la red de partida  $N$ , y aplicamos la siguiente construcción para obtener una red  $N'$  :

$$P' = P \cup \{s_t \mid t \in T\} \cup \{s_i \mid i = 1, \dots, 8\}$$

$$T' = T \cup \{t_i \mid i = 1, \dots, 7\}$$

$$F' = F \cup \{(t, s_t), (s_t, t) \mid t \in T\} \cup \{(t_1, s_8), (s_8, t_2), (t_2, s_6), (t_2, s_7), (s_6, t_3), (t_3, s_3), (s_3, t_6), (t_6, p), (t_6, s_4), (s_5, t_6), (p, t_3), (s_6, t_5), (s_4, t_3), (s_7, t_4), (t_4, s_5), (s_5, t_5), (t_5, s_2), (t_5, s_4), (s_4, t_5), (s_2, t_7), (t_7, s_2), (t_7, s_1)\}$$

Figura 23: Red  $N'$ 

$$W'(f') = \begin{cases} W(f') & \text{si } f' \in F \\ 2 & \text{si } f' = (t_7, s_1) \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$M'_0(p') = \begin{cases} M_0(p') & \text{si } p' \in P \\ 1 & \text{si } p' = s_t, \text{ para } t \in T \vee p' = s_4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Esta red está representada gráficamente en la figura 23.

En este caso, el disparo de la transición  $t_1$  lanza la ejecución de un test que detecta si el lugar seleccionado  $p$  está marcado o no, y en función de ello se permite el disparo indefinido de la transición  $t_7$  o no.

De nuevo, un marcaje  $M$  de  $N$  tiene asociado un marcaje  $\varphi(M)$  en  $N'$ , definido como sigue:

$$\varphi(M)(p') = \begin{cases} M(p') & \text{si } p' \in P \\ 1 & \text{si } p' = s_t, \text{ para algún } t \in T \\ 1 & \text{si } p' = s_4 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Con el mismo razonamiento empleado en la proposición anterior es sencillo demostrar que si  $M[R]_{pdc}M'$  es un paso de  $N$ , entonces  $\varphi(M)[R]_{pdc}\varphi(M')$  es un paso de  $N'$ .

Si existe un marcaje alcanzable  $M$  en  $N$  con 0 tokens en el lugar  $p$ , entonces el marcaje  $\varphi(M)$  es alcanzable en  $N'$ , y sobre él podemos disparar la transición  $t_1$ , iniciando de esta forma el test, que terminará disparando la transición  $t_5$ , la cual marca el lugar  $s_2$ , y permite el disparo de  $t_7$  un número infinito de veces. Por tanto,  $N'$  sería  $s_1, k$ -ilimitada linealmente para cualquier  $k$  que hubiésemos elegido.

Recíprocamente, si  $N'$  es  $s_1, k$ -ilimitada linealmente, debe existir un marcaje alcanzable en  $N'$  en el que  $s_1$  tenga un número positivo de tokens. Por tanto, para poder haber alcanzado ese marcaje ha debido dispararse en algún momento la transición  $t_1$ , y además, el lugar  $p$  debió estar desmarcado en ese momento. Por tanto, el marcaje de  $N'$  anterior al disparo de  $t_1$  era también alcanzable en  $N$  (proyectado sobre los lugares de  $P$ ), y de ahí concluimos la existencia de un marcaje alcanzable en  $N$  con 0 tokens en el lugar  $p$ .

De nuevo, la indecidibilidad de esta propiedad para la semántica débil conjuntista se extiende de forma inmediata (con el mismo razonamiento empleado en la proposición anterior) a la semántica de Máximo Paralelismo.  $\square$

**Proposición 5.6** La  $\beta$ -vivacidad es indecidible para RPTR con la semántica de Máximo Paralelismo.

**Demostración:** Sea de nuevo una red  $N$  con la semántica débil conjuntista. Consideramos un lugar cualquiera  $p \in P$  y construimos la red  $N'$  siguiente:

$$\begin{aligned} P' &= P \cup \{s_t \mid t \in T\} \cup \{s_i \mid i = 1, \dots, 7\} \cup \{w_i \mid i = 1, \dots, \beta\} \\ T' &= T \cup \{t_i \mid i = 1, \dots, \beta\} \cup \{c_i \mid i = 1, \dots, 6\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F' &= F \cup \{(t, s_t), (s_t, t) \mid t \in T\} \cup \{(w_i, t_i) \mid i = 1, \dots, \beta\} \cup \\
&\quad \{(t_i, w_{i+1}) \mid i = 1, \dots, \beta - 1\} \cup \{(c_1, s_1), (s_1, c_2), (c_2, s_2), (c_2, s_3), \\
&\quad (s_2, c_3), (c_3, s_4), (s_4, c_6), (c_6, p), (c_6, s_5), (s_5, c_3), (p, c_3), (s_6, c_6), \\
&\quad (c_5, s_5) (s_3, c_4), (c_4, s_6), (s_6, c_5), (s_5, c_5) (s_2, c_5), (s_7, c_5), (s_7, t_1), \\
&\quad (t_1, s_7), (t_\beta, w_1)\} \\
W'(f') &= \begin{cases} W(f') & \text{si } f' \in F \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases} \\
M'_0(p') &= \begin{cases} M_0(p') & \text{si } p' \in P \\ 1 & \text{si } p' = s_t, \text{ para } t \in T \vee p' \in \{s_5, s_7, w_1\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}
\end{aligned}$$

Esta red está representada gráficamente en la figura 24. A un marcaje  $M$  de  $N$  le podemos asociar el siguiente marcaje en  $N'$ :

$$\varphi(M)(p') = \begin{cases} M(p') & \text{si } p' \in P \\ 1 & \text{si } p' = s_t, \text{ para algún } t \in T \\ 1 & \text{si } p' = w_1 \vee p' = s_5 \vee p' = s_7 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Con un razonamiento similar al empleado en los dos casos anteriores es sencillo demostrar que si  $M[R]_{pdc}M'$  es un paso de  $N$ , entonces  $\varphi(M)[R]_{pdc}\varphi(M')$  es un paso de  $N'$ .

Si en la red  $N$  existe un marcaje alcanzable  $M$  tal que el lugar  $p$  está desmarcado, entonces el marcaje  $\varphi(M)$  es alcanzable en  $N'$ , y sobre él podemos disparar la transición  $c_1$ , lo que termina por conducir la red a un bloqueo, pues al estar  $p$  desmarcado se disparará la transición  $c_5$ , que sustrae el token de  $s_7$ . Por tanto, la transición  $t_\beta$  no será  $\beta$ -viva.

Recíprocamente, si la transición  $t_\beta$  no es  $\beta$ -viva, entonces existirá un marcaje alcanzable en  $N'$  bajo el cual  $s_7$  no esté marcado (es la única forma de que  $t_\beta$  no sea  $\beta$ -viva). Para ello, la transición  $c_5$  ha debido ser disparada en algún momento, y esto requiere a su vez que la transición  $c_1$  haya sido disparada con anterioridad y además, que el lugar  $p$  no estuviese marcado. El marcaje de  $N'$  anterior al disparo de  $c_1$  es un marcaje alcanzable en  $N$  (proyectado sobre los lugares de  $P$ ) en el que el lugar  $p$  está desmarcado. En consecuencia, existe un marcaje alcanzable en  $N$  en el que el lugar  $p$  está desmarcado.

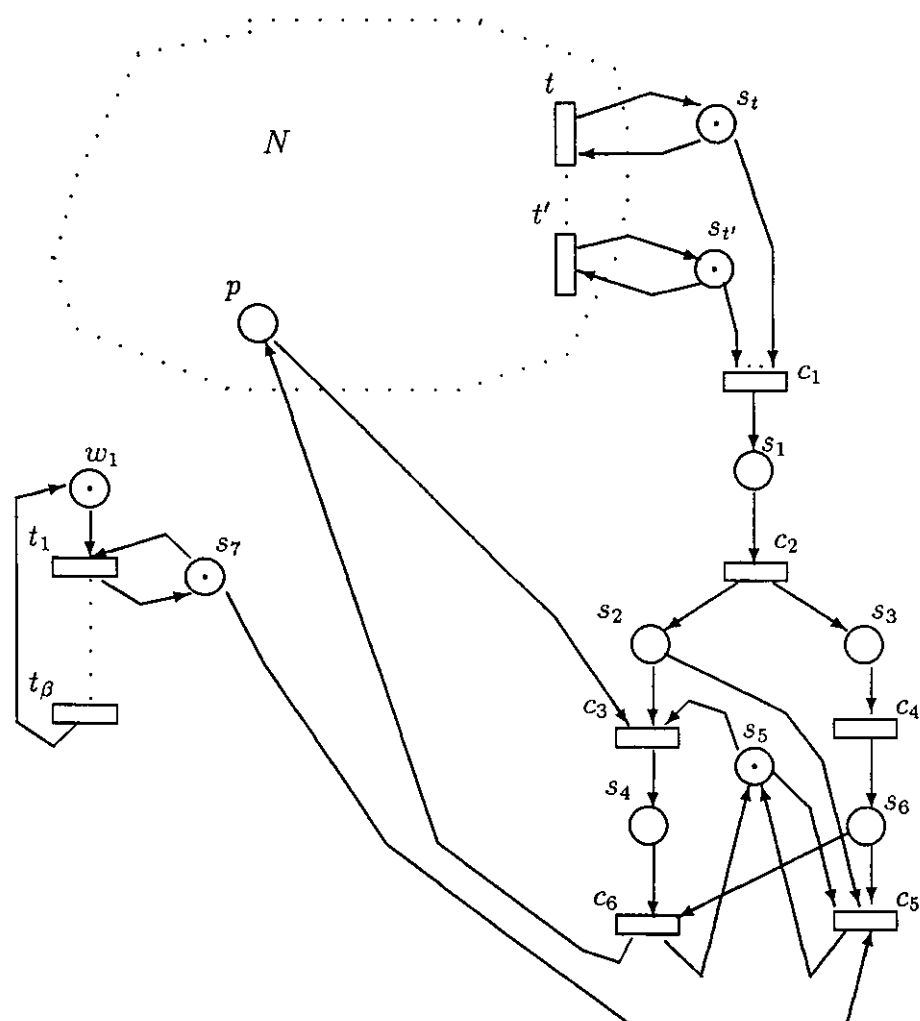
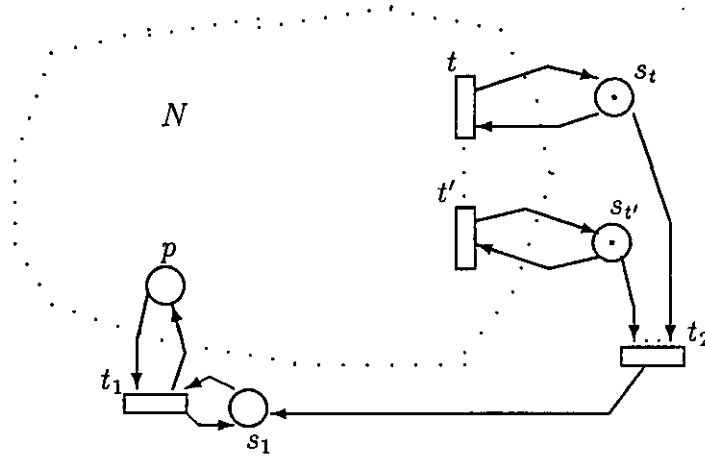


Figura 24: Red  $N'$

Figura 25: Red  $N'$ 

La extensión de la indecidibilidad de esta propiedad a la semántica de Máximo Paralelismo sigue el mismo razonamiento que en los casos anteriores.  $\square$

**Proposición 5.7** La vivacidad es indecidible para RPTR con la semántica de Máximo Paralelismo.

**Demostración:** Dada una red  $N$  con la semántica débil conjuntista y un lugar de la misma  $p$ , se construye la red  $N'$  como sigue:

$$\begin{aligned}
 P' &= P \cup \{s_t \mid t \in T\} \cup \{s_1\} \\
 T' &= T \cup \{t_1, t_2\} \\
 F' &= F \cup \{(t, s_t), (s_t, t) \mid t \in T\} \cup \{(t_2, s_1), (s_1, t_1), \\
 &\quad (t_1, s_1), (p, t_1), (t_1, p)\} \\
 W'(f') &= \begin{cases} W(f') & \text{si } f' \in F \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases} \\
 M'_0(p') &= \begin{cases} M_0(p') & \text{si } p' \in P \\ 1 & \text{si } p' = s_t, \text{ para } t \in T \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Esta red está representada gráficamente en la figura 25.

Como en los casos anteriores, dado un marcaje alcanzable en  $N$ , le podemos



asociar un marcaje  $\varphi(M)$  en  $N'$ , definido de la forma siguiente:

$$\varphi(M)(p') = \begin{cases} M(p') & \text{si } p' \in P \\ 1 & \text{si } p' = s_t, \text{ para algún } t \in T \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Una vez más, si  $M[R]_{pdc}M'$  es un paso de  $N$ , entonces  $\varphi(M)[R]_{pdc}\varphi(M')$  es un paso de  $N'$ .

Si en la red  $N$  existe un marcaje alcanzable  $M$  con 0 tokens en el lugar  $p$ , el marcaje  $\varphi(M)$  será alcanzable en  $N'$ , y sobre él podemos disparar la transición  $t_2$ , que genera el bloqueo de la red  $N'$ . Por tanto, la transición  $t_1$  no será viva.

Recíprocamente, si la transición  $t_1$  no es viva, existirá un marcaje alcanzable  $\tilde{M}$  en  $N'$  tal que desde dicho marcaje no es posible disparar dicha transición. Si en el marcaje  $\tilde{M}$  el lugar  $s_1$  está marcado, el lugar  $p$  debe estar desmarcado pues en caso contrario  $t_1$  podría ser disparada. Además, el último paso posible de  $N'$  fue  $\{t_2\}$ , que no afecta al marcaje de  $p$ . Por tanto, el marcaje anterior al disparo de  $t_2$  proyectado sobre  $P$  es un marcaje alcanzable en  $N$  en el que el lugar  $p$  está desmarcado. Si, por el contrario, el lugar  $s_1$  no está marcado en el marcaje  $\tilde{M}$ , podremos disparar sobre dicho marcaje la transición  $t_2$ , lo que generará un nuevo marcaje  $\tilde{M}_1$  en el que el lugar  $s_1$  ya estará marcado. Por hipótesis, el marcaje  $\tilde{M}_1$  no puede permitir el disparo de  $t_1$ , por lo que el lugar  $p$  debe estar desmarcado. De nuevo, el disparo de  $t_2$  no afecta al marcaje del lugar  $p$ , y por tanto, concluimos la existencia de un marcaje alcanzable en  $N$  con 0 tokens en el lugar  $p$ .

Como en los casos anteriores, la indecidibilidad de esta propiedad se extiende de forma inmediata a la semántica de Máximo Paralelismo.  $\square$

### 5.3 Máximo Paralelismo en Redes No Restrictivas

En esta sección vamos a estudiar la decidibilidad del problema de alcance estricto sobre Redes de Petri Temporizadas No-Restrictivas con la semántica de máximo paralelismo sobre transiciones no autónomas.

**Definición 5.23** (Condición de Disparo para la Semántica de Máximo Paralelismo) Sea  $N = (P, T, F, W, \delta)$  una Red de Petri Temporizada y sea  $M$  un marcaje de

$N$  en un instante cualquiera. Se dice que un multiconjunto de transiciones  $R$  *está permitido* bajo ese marcaje con la semántica de *máximo paralelismo no restrictiva* si y sólo si se cumplen las condiciones siguientes:

1.  $M_1(p) \geq \sum_{t \in T} R(t) \cdot W(p, t), \forall p \in P$
2.  $\nexists t \in T, \bullet t \neq \emptyset$ , tal que  $R \cup \{t\}$  satisface la condición (1) de esta definición.

Lo denotaremos por  $M[R]_{pn}$ . □

**Definición 5.24** (Regla de Activación Bajo Máximo Paralelismo en Redes No Restrictivas) Sea  $N = (P, T, F, W, \delta)$  una Red de Petri Temporizada,  $M = (M_1, M_2)$  un marcaje de la misma en un instante  $\beta \in \mathbb{N}$  y  $E(M)$  el conjunto siguiente:

$$E(M) = \{R \mid M[R]_{pn}\}$$

Entonces, **debemos disparar** un multiconjunto  $R \in E(M)$  en el instante  $\beta$  considerado, obteniendo un nuevo marcaje  $M' = (M'_1, M'_2)$  en el instante  $\beta + 1$ , dado por

$$1. M'_1 = M_1 - \sum_{t \in C_0} R(t) \cdot W(-, t) + \sum_{t \in C_1} R(t) \cdot W(t, -) + \sum_{(t, 1) \in C_2} M_2(t, 1) \cdot W(t, -)$$

donde  $R$  es el multiconjunto disparado y  $C_0, C_1, C_2$  están definidos de la forma siguiente:

$$C_0 \doteq \{t \in T \mid R(t) > 0\}$$

$$C_1 \doteq \{t \in T \mid R(t) > 0 \wedge \delta(t) = 1\}$$

$$C_2 \doteq \{(t, 1) \in T \times \mathbb{N} \mid M_2(t, 1) > 0\}$$

$$2. M'_2 : T \times \mathbb{N}^+ \longrightarrow \mathbb{N} \text{ con}$$

$$M'_2(t, \beta') \doteq \begin{cases} R(t), & \text{si } \beta' = \delta(t) - 1 \\ M_2(t, \beta' + 1), & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Esta evolución en un paso se denota por:  $M_0[R]_{pn}M'$ . □

También pueden definirse (de forma análoga a como se hizo para redes restrictivas) bajo esta semántica los problemas de alcance, alcance estricto, vivacidad,  $\beta$ -vivacidad, etc. En la sección anterior vimos que el problema de alcance, la

vivacidad, la  $\beta$ -vivacidad, la ausencia de bloqueos, la ilimitación, la ilimitación  $s$ -lineal uniforme y la ilimitación  $s, k$ -lineal eran todos ellos indecidibles para Redes de Petri Temporizadas Restrictivas. Por tanto, también serán indecidibles para la semántica de Máximo Paralelismo no Restrictiva, pues las anteriores son un caso particular de éstas. No tiene sentido plantearse la decidibilidad de la ausencia de  $\beta$ -bloqueos, debido a la presencia de las transiciones autónomas. Veamos entonces qué ocurre con el alcance estricto, que sí era decidible.

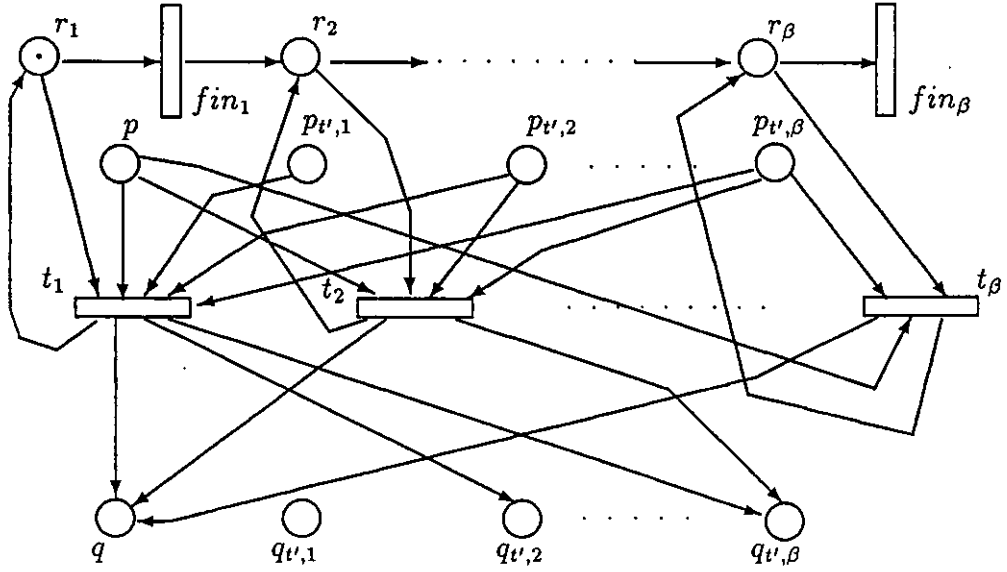
Comenzaremos estudiando el alcance estricto en Redes No Temporizadas con la semántica citada de máximo paralelismo para las transiciones no autónomas (la formalización de esta semántica para redes no temporizadas es ya inmediata) y más tarde extenderemos este estudio a redes temporizadas. La simulación que presentamos de cara a estudiar la decidibilidad del alcance estricto se basa en las ideas siguientes. Dado un  $\beta \in \mathbb{N}$ , consideramos para cada lugar  $p$  y cada transición no autónoma  $t$  de la red de partida  $\beta$  nuevos lugares  $\{p_{t,1}, \dots, p_{t,\beta}\}$ . Además, cada transición  $t$  de la red de partida es reemplazada por  $\beta$  nuevas transiciones  $\{t_1, \dots, t_\beta\}$ .

Para cada  $i \in \{1, \dots, \beta\}$ , el conjunto de lugares  $\{p_{t,i} \mid p \in P, t \in T, *t \neq \emptyset\}$  nos servirá para guardar el estado resultante una vez disparadas (en secuencia) las transiciones correspondientes al paso  $i$ , es decir, una vez sustraídos los tokens de las precondiciones de dichas transiciones. En consecuencia, una vez simulada una secuencia de pasos disponemos de la información de estado tras la simulación de cada paso, la cual se utiliza posteriormente para testear si dicha simulación ha respetado o no la condición de máximo paralelismo sobre las transiciones no autónomas.

Veamos la simulación con mayor detalle:

**Definición 5.25** Sea  $N = (P, T, F, W, M_0)$  una Red de Petri Marcada con la semántica de Máximo Paralelismo No-Restrictiva y  $\beta \in \mathbb{N}^+$ . Se define la Red de Petri que simula  $N$  hasta el paso  $\beta$  de la forma siguiente:

En primer lugar construimos una red  $N_1$  (figura 26), que nos permite simular una semántica de secuencias de pasos sin máximo paralelismo. En un segundo paso añadiremos el test que nos permita determinar si la secuencia de pasos ejecutada ha respetado la condición de máximo paralelismo sobre las transiciones no autónomas.

Figura 26: Representación parcial de la red  $N_1$ 

$P_1 = P \cup P_{1,1} \cup P_{1,2}$  siendo :

$$P_{1,1} = \{p_{t,i} \mid p \in P, t \in T, \bullet t \neq \emptyset, 1 \leq i \leq \beta\}$$

$$P_{1,2} = \{r_i \mid 1 \leq i \leq \beta\}$$

$T_1 = T_{1,1} \cup T_{1,2}$  siendo :

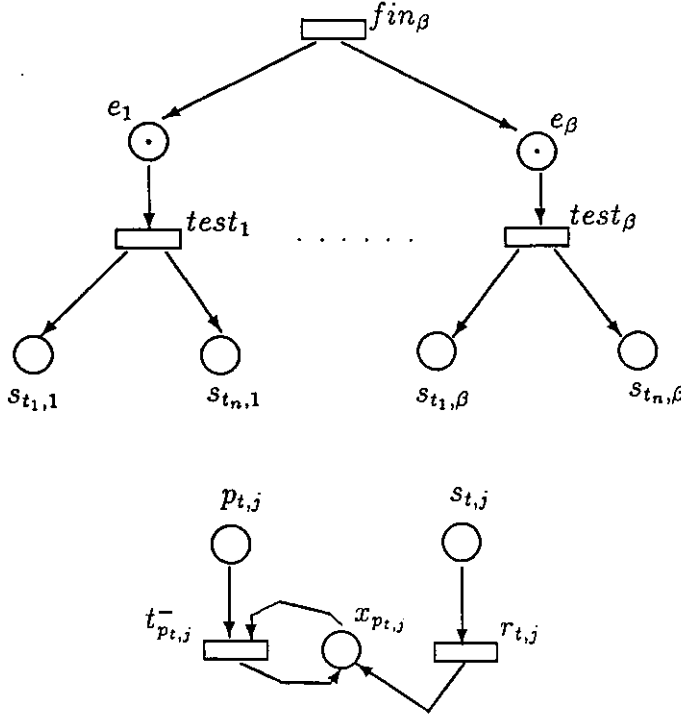
$$T_{1,1} = \{t_i \mid t \in T, 1 \leq i \leq \beta\}$$

$$T_{1,2} = \{fin_i \mid 1 \leq i \leq \beta\}$$

$$F_1 = \{(p, t_j) \mid (p, t) \in F, 1 \leq j \leq \beta\} \cup \{(fin_i, r_{i+1}) \mid 1 \leq i \leq \beta - 1\} \cup \\ \{(t_i, p_{v,j}) \mid (t, p) \in F, t' \in T, \bullet t' \neq \emptyset, j \geq i + 1\} \cup \{(r_i, fin_i) \mid 1 \leq i \leq \beta\} \cup \\ \{(t_j, p) \mid (t, p) \in F, 1 \leq j \leq \beta\} \cup \{(r_i, t_i), (t_i, r_i) \mid t \in T, 1 \leq i \leq \beta\} \cup \\ \{(p_{v,i}, t_j) \mid (p, t) \in F, t' \in T, \bullet t' \neq \emptyset, i \geq j\}$$

$$W_1(f) = \begin{cases} W(p, t) & \text{si } f = (p_{v,i}, t_j) \vee f = (p, t_j) \\ W(t, p) & \text{si } f = (t_i, p_{v,j}) \vee f = (t_j, p) \\ 1 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$M_1(p') = \begin{cases} M_0(p) & \text{si } p' = p_{v,i} \vee p' = p \\ 1 & \text{si } p' = r_1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Figura 27: Representación parcial de la Red  $N_2$ 

La red  $N_1$  no captura todavía la semántica de máximo paralelismo, ya que se permiten secuencias de pasos que no cumplen la condición de máximo paralelismo. Por ello, a continuación se añade a esta red un test que nos permite determinar si la secuencia de pasos que ha sido ejecutada ha cumplido o no dicha condición.

Definimos entonces la red  $N_2$  (ver figura 27) como sigue:

$$P_2 = P_1 \cup \{s_{t,j} \mid t \in T, \bullet t \neq \emptyset, 1 \leq j \leq \beta\} \cup \{x_p \mid p \in P_{1,1}\} \cup \{e_j \mid 1 \leq j \leq \beta\}$$

$$T_2 = T_1 \cup \{test_i \mid 1 \leq i \leq \beta\} \cup \{t_p^- \mid p \in P_{1,1}\} \cup \{r_{t,j} \mid t \in T, \bullet t \neq \emptyset, 1 \leq j \leq \beta\}$$

$$F_2 = F_1 \cup \{(fin_\beta, e_i), (e_i, test_i) \mid 1 \leq i \leq \beta\} \cup \{(test_i, s_{t,i}), (s_{t,i}, r_{t,i}) \mid t \in T, \bullet t \neq \emptyset, 1 \leq i \leq \beta\} \cup \{(r_{t,i}, x_{p_{t,i}}) \mid t \in T, \bullet t \neq \emptyset, 1 \leq i \leq \beta, p \in P, p \notin \bullet t\} \cup \{(p, t_p^-), (t_p^-, x_p), (x_p, t_p^-) \mid p \in P_{1,1}\}$$

$$W_2(f) = \begin{cases} W_1(f) & \text{si } f \in F_1 \\ 1 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$M_2(p) = \begin{cases} M_1(p) & \text{si } p \in P_1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

□

**Definición 5.26** Sea  $N = (P, T, F, W, M_0)$  una Red de Petri Marcada y  $R$  un multiconjunto de transiciones sobre  $T$ . Definimos el conjunto de posibles secuencializaciones de  $R$  como sigue:

$$\text{sec}(R) = \{\bar{\sigma} \mid \bar{\sigma} \text{ es una secuencia de transiciones tal que } \bar{\sigma}(t) = R(t), \forall t \in T\}$$

siendo  $\bar{\sigma}(t)$  el número de instancias de  $t$  en  $\bar{\sigma}$ .

□

**Teorema 5.4** Sea  $N = (P, T, F, W, M_0)$  una Red de Petri Marcada con su semántica de pasos,  $\beta \in \mathbb{N}^+$ ,  $\sigma = M_0[R_1]M_1 \dots [R_\beta]M_\beta$ , una secuencia de pasos (en la que permitimos pasos vacíos <sup>1</sup>) y  $N'$  la red obtenida aplicando la construcción anterior.

Para cada  $i \in \{1, \dots, \beta\}$  consideremos un  $\bar{\sigma}_i \in \text{sec}(R_i)$ . Entonces definimos la subsecuencia  $\sigma'_i$  considerando las copias  $i$ -ésimas de cada transición en  $\bar{\sigma}_i$ , e incluyendo al final la transición  $\text{fin}_i$ ; es decir, si  $\bar{\sigma}_i = t^1 \dots t^{s_i}$ , con  $t^j \in T$ , para  $1 \leq j \leq s_i$ , se considera  $\sigma'_i = t^1_i \dots t^{s_i}_i \text{fin}_i$  (donde ahora  $t^j_i \in T_{1,1}$ , para  $1 \leq j \leq s_i$ ).

Entonces se tiene:  $M'_i[\sigma'_{i+1}]M'_{i+1}$ , para  $i = 0, \dots, \beta - 1$ , siendo  $M'_i$  un marcaje de  $N'$  definido de la forma siguiente:

$$M'_i(p') = \begin{cases} M_i(p) & \text{si } p' = p \in P \vee p' = p_{t,k} \in P_{1,1}, \text{ con } k \geq i + 1 \\ 1 & \text{si } p' = e_j, j \in \{1, \dots, \beta\} \wedge i = \beta \\ 1 & \text{si } i \neq \beta \wedge p' = r_{i+1} \\ M_{k-1}(p) - \sum_{t \in R_k} R_k(t) \cdot W(p, t) & \text{si } p' = p_{t,k} \in P_{1,1} \wedge 1 \leq k \leq i \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

En definitiva,  $M'_0[\sigma']M'_\beta$ , siendo  $\sigma' = \sigma'_1 \dots \sigma'_\beta$ .

**Demostración:** La demostración del teorema es sencilla, aunque relativamente larga, por lo que sólo damos las ideas principales de la misma. Observamos en primer lugar que el marcaje  $M'_0$  coincide en efecto con el marcaje inicial de  $N'$ , tal como fue definido en la definición 5.25.

<sup>1</sup>De esta forma admitimos secuencias de pasos no vacíos de longitud menor o igual que  $\beta$ .

Se realiza un razonamiento por inducción sobre  $i$ . En el caso base ( $i=0$ ) tenemos que en  $M_0$  hay suficientes tokens para disparar (de forma conjunta) las transiciones de  $R_1$  (en  $N$ ). En el marcaje  $M'_0$  tenemos un token en el lugar  $r_1$ , y tenemos desmarcados los demás lugares  $r_j$ , lo que únicamente nos permite disparar transiciones con subíndice 1 (es decir transiciones correspondientes al primer paso). Las transiciones asociadas a las de  $R_1$  en  $N'$  con subíndice 1 tienen como precondiciones las mismas que las de dichas transiciones originales en  $N$  (aunque aparezcan repetidas); por tanto, estas transiciones pueden ser disparadas secuencialmente en  $N'$ . Nótese, sin embargo, que  $\sigma'_1$  no deposita tokens sobre los lugares con subíndice 1, por lo que estos lugares pierden los tokens que hayan sido sustraídos por efecto del disparo de las transiciones en  $\sigma'_1$ , que en definitiva es lo mismo que se sustrae en  $N$  por efecto de  $R_1$ . El resto de lugares (los que tienen subíndice mayor que 1 y los de partida) quedan marcados exactamente igual que sus correspondientes en  $N$ . Finalmente, con el disparo de  $fin_1$  se desmarca el lugar  $r_1$ , y el lugar  $r_2$  obtiene un token. En definitiva, se ha alcanzado el marcaje  $M'_1$ .

Para el caso general se supone que hemos probado  $M'_{i-1}[\sigma'_i]M'_i$ . El razonamiento a seguir es análogo al del caso base, teniendo en cuenta que ahora las transiciones tienen como precondiciones únicamente las copias de los lugares de partida con subíndice mayor o igual que  $i+1$ , y que el marcaje de estos lugares es exactamente el mismo que el de  $M_i$ . En consecuencia,  $\sigma'_{i+1}$  es una secuencia de ocurrencia válida en  $N'$ , y con su ejecución se obtiene el marcaje  $M'_{i+1}$ . La única diferencia con respecto del caso base es que ahora hay lugares que no modifican su marcaje (aquellos con subíndice menor o igual que  $i$ ), para los cuales basta aplicar la hipótesis de inducción.  $\square$

**Definición 5.27** Sea  $N = (P, T, F, W, M_0)$  una Red de Petri Marcada,  $N'$  la red obtenida aplicando la definición 5.25, y  $\sigma'$  una secuencia de ocurrencia en  $N'$  tal que  $M'_0[\sigma']M'$ , con  $M'(e_j) = 1, \forall j \in \{1, \dots, \beta\}$ .

Definimos la descomposición en pasos de  $\sigma'$  como sigue:  $\sigma' = \sigma'_1 \dots \sigma'_\beta$ , siendo para cada  $i$   $\sigma'_i$  de la forma siguiente:

$$\sigma'_i = t^1 \dots t^{s_i} fin_i$$

con  $t^j \neq fin_h$ , para  $1 \leq j \leq s_i$ ,  $1 \leq h \leq \beta$ . Esta descomposición existe <sup>2</sup> debido a la estructura de  $N'$ , y dado que  $M'(e_j) = 1$ ,  $\forall j \in \{1, \dots, \beta\}$ . Además, las transiciones  $t^j$  deben ir asociadas a transiciones de la red  $N$ , y exactamente al paso  $i$  (es decir, tienen subíndice  $i$  en la notación introducida). Por tanto, podemos de hecho escribir  $\sigma'_i$  como sigue:  $\sigma'_i = t_i^1 \dots t_i^{s_i} fin_i$ .  $\square$

**Teorema 5.5** Sea  $N = (P, T, F, W, M_0)$  una Red de Petri Marcada,  $N'$  la red obtenida aplicando la definición 5.25, y  $\sigma'$  una secuencia de ocurrencia en  $N'$  tal que  $M'_0[\sigma']M'$ , con  $M'(e_j) = 1$ ,  $\forall j \in \{1, \dots, \beta\}$ . Consideremos la descomposición en pasos de  $\sigma'$ ,  $\sigma' = \sigma'_1 \dots \sigma'_\beta$ , con  $\sigma'_i = t_i^1 \dots t_i^{s_i} fin_i$ .

Para cada  $i$  sea  $M''_i$  el marcaje obtenido tras la ejecución de la secuencia  $\sigma'_1 \dots \sigma'_i$ . Entonces se tiene  $M' = M''_\beta$ .

A cada  $\sigma'_i$  le podemos asociar un paso en  $N$  como sigue:

$$R_i(t) = \text{número de instancias de } t_i \text{ en } \sigma'_i$$

Entonces  $R_1 \dots R_\beta$  es una secuencia de pasos (algunos de los cuales pueden ser vacíos) en  $N$  y los marcajes  $M_i$  obtenidos a lo largo de la ejecución de dicha secuencia son tales que  $M''_i = M'_i$ , estando los  $M'_i$  definidos como en el teorema 5.4.

**Demostración:** De nuevo se aplica un razonamiento por inducción del que exponemos las ideas principales. En el caso base, el disparo conjunto de  $R_1$  es posible debido a que en  $N'$  el disparo de  $\sigma'_1$  no genera tokens sobre las copias de los lugares de  $N$  con subíndice 1, aunque sí sustrae los tokens correspondientes. Por tanto, si podemos disparar secuencialmente las transiciones  $t_1^1 \dots t_1^{s_1}$ , también podremos disparar  $R_1$  en  $N$ . Sea  $M_1$  el marcaje obtenido con el disparo de  $R_1$  en  $N$ . Entonces  $\sigma'_1 \in Sec(R_1)$ , y aplicando el teorema 5.4 obtenemos  $M'_0[\sigma'_1]M'_1$ . De ahí,  $M'_1 = M''_1$ .

Supongamos entonces que  $R_i$  puede ser disparada en  $N$ , y que su disparo produce un marcaje  $M_i$ , con las condiciones indicadas. Entonces, la secuencia de transiciones  $\sigma'_{i+1}$  sabemos que puede ser disparada en  $N'$ , y que sustrae tokens de las copias de los lugares de  $N$  que tengan subíndice mayor o igual que  $i+1$ , pero no añade tokens sobre las copias con subíndice  $i+1$ . En consecuencia,  $R_{i+1}$  puede

<sup>2</sup>No obstante, obsérvese que algunos  $\sigma'_i$  pueden constar únicamente del disparo de  $fin_i$ .



ser disparado bajo  $M_i$  (pues  $M_i'' = M_i'$ ). Sea entonces  $M_{i+1}$  el marcaje obtenido con el disparo de  $R_{i+1}$  en  $N$ . De nuevo se aplica el teorema 5.4 para obtener que  $M_{i+1}' = M_{i+1}''$ .  $\square$

Con estos dos teoremas hemos visto que la codificación realizada simula las secuencias de pasos de la red de partida, hasta alcanzar un marcaje en el que los lugares  $e_j$  quedan marcados. Veamos ahora como el test nos permite decidir si se ha respetado la condición de máximo paralelismo.

**Definición 5.28** Sea  $N = (P, T, F, W, M_0)$  una Red de Petri Marcada,  $\beta \in \mathbb{N}^+$  y  $N'$  la red obtenida aplicando la definición 5.25. Entonces, de acuerdo con los dos teoremas anteriores podemos definir el siguiente conjunto para todo  $\sigma \in P_\beta(N, M_0)$  :

$$Cor(\sigma) = \{\sigma' \mid \sigma' \text{ es s.o. en } N' \text{ obtenida según el teorema 5.4 a partir de } \sigma\}$$

siendo  $P_\beta(N, M_0)$  el conjunto de secuencias de pasos no vacíos de longitud menor o igual que  $\beta$  de  $N$ .  $\square$

**Teorema 5.6** Sea  $N = (P, T, F, W, M_0)$  una Red de Petri Marcada,  $\beta \in \mathbb{N}^+$ ,  $\sigma = M_0[R_1]M_1 \dots [R_\beta]M_\beta$  una secuencia de pasos de  $N$  (en la que permitimos pasos vacíos) y  $N'$  la red obtenida aplicando la definición 5.25. Si  $\sigma$  cumple la condición de máximo paralelismo para las transiciones no autónomas, entonces para toda  $\sigma'_1 \in Cor(\sigma)$  existe  $\sigma'_2$  tal que  $\sigma' = \sigma'_1 \sigma'_2$  es secuencia de ocurrencia en  $N'$ , cumpliendo:

- $\forall i \in \{1, \dots, \beta\}, \forall t \in T, \bullet t \neq \emptyset, \exists p \in P, p \in \bullet t, \text{ tal que } M'(p_{t,i}) < W'(p_{t,i}, t_i).$
- $\forall i \in \{1, \dots, \beta\}, \forall t \in T, \bullet t \neq \emptyset, \forall p \in P, p \notin \bullet t \Rightarrow M'(p_{t,i}) = 0.$
- $M'|_P = M_\beta.$

siendo  $M'$  el marcaje alcanzado tras la ejecución de  $\sigma'$  en  $N'$ .

**Demostración:** Basta tener en cuenta que después de simular la ejecución de cada paso en  $N'$ , las copias de cada lugar de  $N$  correspondientes a dicho paso almacenan el marcaje de dicho lugar en  $N$  una vez sustraídos los tokens correspondientes. Esta información está además repetida para cada transición no autónoma

de la red de partida. Además, esta información no sufre cambios hasta que se inicia la ejecución del test. Por tanto, para cada  $i \in \{1, \dots, \beta\}$ , las copias de lugares con subíndice  $i$  tienen como marcaje el que había una vez disparado en  $N$  el paso  $R_i$ , pero antes de generar los tokens correspondientes sobre las postcondiciones. Sin embargo, los lugares  $p \in P$  mantienen (en  $N'$ ) al término de cada paso el mismo marcaje que en  $N$ .

Por tanto, si  $\sigma$  cumple la hipótesis de máximo paralelismo sobre las transiciones no autónomas, para cada  $\sigma'_1 \in \text{Cor}(\sigma)$ , para cada  $i \in \{1, \dots, \beta\}$  y para cada  $t \in T$ ,  $\bullet t \neq \emptyset$ , la información almacenada en las copias de los lugares de  $N$  de la forma  $p_{t,i}$  debe reflejar la imposibilidad de disparar transiciones no autónomas.

Entonces, cada transición  $test_i$  tiene por objeto lanzar un test para analizar si en el paso  $i$  dejó de dispararse alguna instancia permitida de alguna transición no autónoma. Estos tests pueden realizarse además simultáneamente, pues las copias de los lugares originales que utilizan son distintas. Obsérvese además que cada uno de estos tests lanza a su vez un test por cada transición no autónoma en la red original. De nuevo, las copias de los lugares originales utilizadas en cada uno de estos tests son diferentes, lo que permite su ejecución en paralelo.

Para cada  $i \in \{1, \dots, \beta\}$ , el disparo de  $test_i$  marca con un token los lugares del conjunto  $\{s_{t,i} \mid t \in T, \bullet t \neq \emptyset\}$ , lo que permite disparar las transiciones del conjunto  $\{r_{t,i} \mid t \in T, \bullet t \neq \emptyset\}$ . El disparo de cada transición  $r_{t,i}$  marca con un token los lugares  $x_{p_{t,i}}$ , para  $p \notin \bullet t$ , permitiendo de esta forma el disparo de las transiciones  $t_{p_{t,i}}^-$  hasta vaciar los lugares  $p_{t,i}$  (para  $p \notin \bullet t$ ).

En consecuencia, la condición de máximo paralelismo fue respetada en lo que al paso  $i$  y a la transición no autónoma  $t$  respecta si el marcaje que queda en los lugares  $p_{t,i}$  (con  $p \in \bullet t$ ) no permitía el disparo de nuevas instancias de la transición  $t_i$ , es decir, debe existir un lugar  $p_{t,i}$  marcado insuficientemente.  $\square$

El recíproco de este teorema es igualmente cierto:

**Teorema 5.7** Sea  $N = (P, T, F, W, M_0)$  una Red de Petri Marcada,  $\beta \in \mathbb{N}^+$ , y  $N'$  la red obtenida aplicando la definición 5.25. Si  $\sigma'_1$  es una secuencia de ocurrencia en  $N'$  tal que  $M'_0[\sigma'_1]M'_1$ , con  $M'_1(e_j) = 1, \forall j \in \{1, \dots, \beta\}$ , y existe  $\sigma'_2$  tal que  $\sigma' = \sigma'_1 \sigma'_2$  es secuencia de ocurrencia en  $N'$ , cumpliendo:

- $\forall i \in \{1, \dots, \beta\}, \forall t \in T, \bullet t \neq \emptyset, \exists p \in P, p \in \bullet t$ , tal que  $M'(p_{t,i}) < W'(p_{t,i}, t_i)$ .

- $\forall i \in \{1, \dots, \beta\}, \forall t \in T, \bullet t \neq \emptyset, \forall p \in P, p \notin \bullet t \Rightarrow M'(p_{t,i}) = 0.$
- $M'(e_j) = 0, M'(r_j) = 0, \forall j \in \{1, \dots, \beta\}.$
- $M'(s_{t,j}) = 0, \forall t \in T, \bullet t \neq \emptyset, \forall j \in \{1, \dots, \beta\}.$

siendo  $M'$  el marcaje alcanzado tras la ejecución de  $\sigma'$ .

Entonces la secuencia de pasos  $\sigma$  asociada a  $\sigma'_1$  según el teorema 5.5 cumple la condición de máximo paralelismo sobre las transiciones no autónomas.

**Demostración:** Por reducción al absurdo, si existe un paso  $j$  que no cumple dicha condición, entonces es porque una transición no autónoma  $t \in T$  permitida no fue disparada en dicho paso. Entonces, en  $N'$  las copias de los lugares de partida de la forma  $p_{t,i}$  reflejarán un marcaje en el que la transición  $t_j$  está permitida. Por tanto, no podrá existir un  $\sigma'_2$  que cumpla con las condiciones indicadas anteriormente.  $\square$

**Corolario 5.5** El problema de alcance estricto es decidible en Redes de Petri con la Semántica de Máximo Paralelismo No Restrictiva.

**Demostración:** Sea  $N$  una Red de Petri con la semántica de máximo paralelismo no restrictiva,  $\beta \in \mathbb{N}$ ,  $N'$  la codificación obtenida por aplicación de la definición 5.25 y  $M$  un marcaje de  $N$ .

Por los teoremas 5.6 y 5.7 tenemos que  $M$  es alcanzable en  $N$  en tiempo  $\beta$  sii existe un marcaje alcanzable en  $N'$ ,  $M'$ , tal que:

- $M'|_P = M$
- $M'(p_{t,i}) = 0, \forall i \in \{1, \dots, \beta\}, \forall t \in T, \bullet t \neq \emptyset, \forall p \in P, p \notin \bullet t$
- $\forall i \in \{1, \dots, \beta\}, \forall t \in T, \bullet t \neq \emptyset, \exists p \in \bullet t$  tal que  $M'(p_{t,i}) < W'(p_{t,i}, t_i).$
- $M'(e_j) = 0, M'(r_j) = 0, \forall j \in \{1, \dots, \beta\}.$
- $M'(s_{t,j}) = 0, \forall t \in T, \bullet t \neq \emptyset, \forall j \in \{1, \dots, \beta\}.$

Entonces la decidibilidad del alcance estricto la trasladamos a la decidibilidad de esta propiedad de alcanzabilidad en  $N'$ . La existencia de un marcaje  $M'$  que cumpla las susodichas condiciones puede determinarse estudiando un número finito de problemas de alcance de submarcajes, considerando todos los casos posibles (en cuanto a los valores posibles de  $M'(p_{t,i})$ ). En consecuencia hemos reducido

el problema de alcance estricto a un número finito de problemas de alcance de submarcajes, por lo que podemos concluir que el alcance estricto es decidible.  $\square$

**Corolario 5.6** El problema de alcance estricto es decidible en Redes de Petri Temporizadas con la semántica de Máximo Paralelismo No Restrictiva.

**Demostración:** Basta dividir cada transición de la red temporizada en  $\delta(t)$  transiciones, cada una con duración 1, correspondiendo a un instante de la ejecución de la transición. La condición de Máximo Paralelismo sobre las transiciones no autónomas nos favorece en este caso, pues las transiciones asociadas a una transición de la red de partida van a ir ejecutándose sin retrasos. Como la red obtenida tiene en todas sus transiciones duración 1, es equivalente a una Red no temporizada con una semántica de Máximo Paralelismo No Restrictiva sobre la que podemos aplicar el corolario anterior.  $\square$



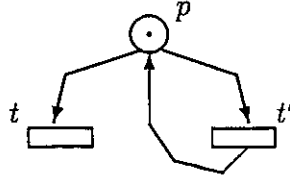
## Capítulo 6

### Time-outs

En sistemas en tiempo real y en protocolos de comunicación resulta necesario disponer de mecanismos que nos permitan controlar la conducta temporal del sistema. En los sistemas en tiempo real se espera una respuesta por parte del sistema a determinados eventos externos en un plazo de tiempo limitado, mientras que en los protocolos de comunicación es habitual esperar durante un cierto tiempo tras una emisión, para obtener el acuse de recibo del receptor. Si dicho tiempo transcurre y el acuse de recibo no se ha recibido, se reemite el mensaje. En ambos casos, las restricciones temporales son un factor importante en la especificación del sistema, que no podemos especificar con el modelo de Redes de Petri Temporizadas. Es pues importante incorporar a nuestro modelo alguna clase de *time-outs*, que nos permitan especificar restricciones de tipo temporal.

De esta forma, algunas transiciones de la red llevarán asociado un número entero positivo, que llamaremos su *time-out*, que refleja la restricción temporal para el disparo de dicha transición, desde el momento en que ésta está permitida. La semántica concreta de los *time-outs* dependerá del modelo que se utilice.

En esta sección vamos a definir varios posibles modelos de *time-outs*. Estos modelos los vamos a dividir en dos grupos. Por una parte, aquellos modelos en los que los *time-outs* suponen asociar simplemente un número entero a algunas transiciones de la red, que representa el margen de tiempo que tiene para dispararse la transición a la que va asociada. La segunda clase de modelos considera además una transición (en cierta forma especial), asociada a las transiciones con *time-outs*. Estas transiciones sólo estarán permitidas cuando cumpla el *time-out*. Esta

Figura 28: Ejemplo de *Time-Out*

última clase de modelos se corresponde con los modelos implementados en algunos lenguajes de programación, como Ada.

## 6.1 Modelos de time-outs sin transiciones especiales

Vamos a definir cuatro modelos semánticos de *time-outs* basándonos en la forma de decidir cuándo desactivar un *time-out*, así como en la forma de decidir cuándo dispararlo.

### 6.1.1 Modelo dinámico, basado en las precondiciones

La idea básica es que para cada transición que lleve asociado un *time-out*, éste empieza a contar desde el momento en que la transición está permitida. La desactivación de un *time-out* tiene lugar cuando se dispara la transición o cuando en un conflicto dinámico no hay suficientes tokens para que esa transición ocurra simultáneamente con el paso que va a ser ejecutado, independientemente de que a la salida puedan añadirse a sus lugares precondición los tokens necesarios para que ésta vuelva a estar permitida (en este caso se reinicializa el *time-out*).

Por ejemplo, en la red de la figura 28 el disparo de  $t'$  reinicializa el *time-out* de  $t$ , pues  $t$  no puede dispararse a la vez que  $t'$ . No se desactivaría el *time-out* si en el lugar  $p$  hubiese dos tokens.

Podemos considerar dos variantes del modelo, en función del significado que demos al *time-out*. En principio, podemos decidir que los *time-outs* representen un tiempo máximo de disparo, obligando a las transiciones a ocurrir cuando al tiempo del *time-out* le quede una unidad de tiempo para expirar. En este caso,

lo que forzamos realmente es el disparo en cada instante de un conjunto maximal de transiciones de entre las que tienen un tiempo restante de *time-out* con valor 1. Ello se debe a la posible presencia de conflictos, pues puede darse el caso de que dos transiciones estén en conflicto, y ambas tengan un tiempo restante de *time-out* igual a 1, con lo que en el instante siguiente sólo una de ellas puede ocurrir, desactivando automáticamente el *time-out* de la otra. Esta primera variante refleja un no-determinismo temporal interno, entendiendo que el sistema tiene un margen de tiempo para disparar una transición, desde el momento en que ésta está permitida.

**Definición 6.1** (Modelo 1)

Se define una Red de Petri Temporalizada con Time-Outs de clase 1 (RPTTO-1) como sigue:

$$N = (P, T, T', D, F, W, \delta)$$

siendo:

$P$  : conjunto de lugares

$T$  : conjunto de transiciones

$T' \subseteq T$  : subconjunto de transiciones que llevan asociado *time-out*

$D : T' \longrightarrow \mathbb{N}^+$  : tiempos de *time-out*

$F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$  : arcos

$W : F \longrightarrow \mathbb{N}^+$  : pesos

$\delta : T \longrightarrow \mathbb{N}^+$  : duraciones de las transiciones

Un marcaje para una RPTTO-1  $N$  es una terna  $M = (M_1, M_2, M_3)$  tal que:

1.  $M_1 \in \mathbb{N}^P$
2.  $M_2 : T \times \mathbb{N}^+ \longrightarrow \mathbb{N}$ , tal que  $\forall t \in T$  y  $\forall \gamma \geq \delta(t) : M_2(t, \gamma) = 0$
3.  $M_3 : T' \longrightarrow \mathbb{N}$ , verificando:

$$(a) \forall t \in T' \text{ tal que } (\exists p \in P : M_1(p) < W(p, t)) \Rightarrow M_3(t) = 0$$

$$(b) \forall t \in T' : (\forall p \in P, M_1(p) \geq W(p, t)) \Rightarrow 0 < M_3(t) \leq D(t)$$

La primera componente corresponde al concepto clásico de marcaje, como un número de tokens sobre cada lugar de la red. La segunda componente refleja los tiempos restantes para las transiciones que se encuentran en ejecución de forma



análoga a la definición de marcaje para RPT. La tercera componente representa los tiempos restantes para el disparo de los *time-outs*. Las dos condiciones impuestas sobre esta componente reflejan el hecho de que las transiciones de  $T'$  no permitidas no tienen activado su *time-out*, mientras que por el contrario, las transiciones de  $T'$  que sí estén permitidas tienen lanzado su *time-out*.

Un marcaje puede ser **inicial** cuando cumple las dos condiciones siguientes:

1.  $M_2$  es vacío

$$2. \forall t \in T' : M_3(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \exists p \in P : M_1(p) < W(p, t) \\ D(t) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

□

La notación que vamos a utilizar para especificar un paso en este modelo semántico será la siguiente:  $M[R]_1 M'$ . Para definir la regla de disparo haremos uso de la definición de la misma vista para el caso de RPT, que especificamos con la notación:  $M[R]M'$ .

**Definición 6.2** (Regla de Disparo para RPTTO-1)

Dada una RPTTO-1  $N$  y un marcaje de la misma  $M$ , decimos que un multiconjunto de transiciones  $R$  de  $T$  *está permitido bajo el modelo 1* sobre el marcaje  $M$ , lo que denotamos por  $M[R]_1$ , si satisface las condiciones siguientes:

1.  $M_1(p) \geq \sum_{t \in T} R(t) \cdot W(p, t), \forall p \in P$
2.  $\forall t \in T' : M_3(t) = 1 \Rightarrow (R(t) > 0 \vee (R(t) = 0 \wedge \neg(M_1, M_2)[R \cup \{t\}]))$

La segunda condición refleja la obligatoriedad de disparar aquellas transiciones que lleven asociado un *time-out* al cual le queda sólo una unidad de tiempo para cumplir, a menos que no estén permitidas simultáneamente con el paso actual.

El disparo de  $R$  da lugar al marcaje  $M' = (M'_1, M'_2, M'_3)$ , definido de la forma siguiente:

1.  $(M'_1, M'_2)$  se obtienen en base a la regla de disparo para RPT:

$$(M_1, M_2)[R](M'_1, M'_2)$$

2.  $M'_3 : T' \rightarrow \mathbb{N}^+$  está definida como sigue:

$$\forall t \in T', M'_3(t) = \begin{cases} M_3(t) - 1 & \text{si } M_3(t) > 1, R(t) = 0 \text{ y } (M_1, M_2)[R \cup \{t\}] \\ D(t) & \text{si } M_3(t) = 0 \text{ y } (M'_1, M'_2)[\{t\}] \\ D(t) & \text{si } M_3(t) > 0 \text{ y } R(t) > 0 \text{ y } (M'_1, M'_2)[\{t\}] \\ D(t) & \text{si } M_3(t) > 0, (M_1, M_2)[\{t\}], \\ & \neg(M_1, M_2)[R \cup \{t\}], (M'_1, M'_2)[\{t\}] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

□

Una posibilidad de estos *time-outs* consiste en la posibilidad de modelar con ellos el máximo paralelismo para conjuntos, lo que se logra poniendo a cada transición un *time-out* igual a 1. En efecto, en este caso estamos obligados a disparar conjuntos maximales de transiciones, por lo que capturamos la semántica de máximo paralelismo débil. En consecuencia, el problema de alcance será indecidible para este modelo (la demostración realizada para demostrar la indecidibilidad del problema de alcance para multiconjuntos sólo hacía uso en realidad de conjuntos de transiciones).

**Proposición 6.1** El problema de alcance para RPTTO-1 es indecidible. □

La segunda variante posible del modelo consiste en considerar que si damos lugar a que un *time-out* expire, llegando a tomar un valor 0, entonces se bloquea la red automáticamente. La diferencia con la variante anterior, es que aquí permitimos a la red disparar en el último momento alguna transición que pudiera estar en conflicto con  $t$ , evitando así el bloqueo de la misma. Por otra parte es claro que este modelo introduce situaciones de bloqueo.

### Definición 6.3 (Modelo 2)

Una Red de Petri Temporizada con Time-Outs de clase 2 (RPTTO-2) se define de una forma idéntica a la vista para el modelo 1:  $N = (P, T, T', D, F, W, \delta)$ .

Un marcaje para una RPTTO-2  $N$  es una tupla  $M = (M_1, M_2, M_3)$  tal que  $M_1$  y  $M_2$  cumplen las condiciones 1 y 2 de la definición 6.1 y  $M_3$  satisface ahora las dos condiciones siguientes:

1.  $\forall t \in T'$  tal que  $(\exists p \in P : M_1(p) < W(p, t)) \Rightarrow M_3(t) = 0$

$$2. \forall t \in T' : 0 \leq M_3(t) \leq D(t)$$

La diferencia fundamental con el modelo anterior, es que ahora  $M_3$  puede ser 0 para transiciones permitidas (en el sentido ordinario de tener suficientes tokens para poder dispararlas). Este caso corresponde a un marcaje terminal, desde el que ya no es posible evolucionar, dada la definición que vamos a realizar de la regla de disparo.

De nuevo, un marcaje puede ser **inicial** cuando cumple las dos condiciones para ser inicial de la definición 6.1.  $\square$

Los pasos en este modelo semántico serán denotados en la forma siguiente:  $M[R]_2 M'$ .

**Definición 6.4** (Regla de Disparo para RPTTO-2)

Dada una RPTTO-2  $N$  y un marcaje de la misma  $M$ , decimos que un multiconjunto de transiciones  $R$  de  $T$  *está permitido bajo el modelo 2* sobre el marcaje  $M$ , lo que denotamos por  $M[R]_2$ , si satisface las condiciones siguientes:

1.  $M_1(p) \geq \sum_{t \in T} R(t) \cdot W(p, t), \forall p \in P$
2.  $\forall t \in T' : \neg(M_3(t) = 0 \wedge (M_1, M_2)[\{t\}])$

La segunda condición refleja la situación de bloqueo que se produce cuando cumple un *time-out* y la transición sigue estando permitida.

El disparo de  $R$  da lugar al marcaje  $M' = (M'_1, M'_2, M'_3)$  definido de la misma forma que en la Def. 6.2  $\square$

**Proposición 6.2** El problema de alcance para RPTTO-2 es indecidible.

**Demostración:** Los marcajes alcanzables en este modelo son los marcajes alcanzables en el modelo de los disparos maximales más algunos marcajes terminales, que podemos distinguir perfectamente, ya que para ellos existen transiciones permitidas en el sentido ordinario tales que  $M_3$  es 0. En consecuencia, como el problema de alcance para el modelo 1 era indecidible, concluimos que el problema de alcance para este segundo modelo es también indecidible.  $\square$

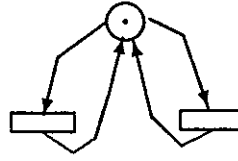


Figura 29: Red con dos transiciones en conflicto, con un *time-out* igual a 1 ambas transiciones

### 6.1.2 Modelo dinámico, basado en las postcondiciones

En este caso, un *time-out* sólo considera la posibilidad de disparar la transición a la que va asociada en cada instante, prescindiendo de si hay tokens suficientes o no en un momento dado para dispararla conjuntamente con el paso disparado en ese momento. En concreto, en la red de la figura 28 el disparo de  $t'$  no desactiva el *time-out* de  $t$ , que sigue contando normalmente. Por supuesto, sí se desactiva un *time-out* si la transición deja de estar permitida en el marcaje obtenido tras ejecutar un paso.

En principio, podríamos considerar de nuevo dos variantes del modelo, en función del significado que demos al *time-out*. Sin embargo, la primera de ellas (basada en forzar el disparo de conjuntos maximales de transiciones para las que resta una unidad de tiempo a su *time-out* asociado) no permite definir en este caso un modelo semántico razonable. La razón es que estamos obligados a razonar en cada momento de la ejecución de la red para realizar un paso que no provoque el cumplimiento de un *time-out*. Ahora bien, no es difícil imaginar una situación de conflicto entre dos transiciones, que tienen ambas un *time-out* asociado de una unidad de tiempo, donde ambas transiciones restauran el token sobre el lugar de conflicto (ver figura 29). En dicha situación, la red estaría semánticamente bloqueada, pues el disparo de cualquiera de las dos transiciones haría cumplir el *time-out* de la otra.

Por lo tanto, nos centramos en este caso en la segunda variante, basada en la idea de bloquear la red cuando un *time-out* alcance el valor 0. Esto genera de nuevo marcajes terminales, que pueden ser distinguidos directamente con un mecanismo similar al utilizado en el modelo anterior.

El modelo formal queda ahora como sigue:

**Definición 6.5** (Modelo 3)

Una Red de Petri Temporizada con Time-Outs de clase 3 (RPTTO-3)  $N = (P, T, T', D, F, W, \delta)$  se define de forma idéntica a la vista para el modelo 1.

Los marcajes para RPTTO-3 se definen exactamente de la misma forma que los marcajes de RPTTO-2.  $\square$

Como de costumbre, denotaremos los pasos en este modelo semántico en la forma siguiente:  $M[R]_3 M'$ .

**Definición 6.6** (Regla de Disparo para RPTTO-3)

Dada una RPTTO-3  $N$  y un marcaje de la misma  $M$ , un multiconjunto de transiciones  $R$  de  $T$  decimos que *está permitido bajo el modelo 3* sobre el marcaje  $M$ , lo que denotamos por  $M[R]_3$ , si satisface las condiciones siguientes:

1.  $M_1(p) \geq \sum_{t \in T} R(t) \cdot W(p, t), \forall p \in P$
2.  $\forall t \in T' : \neg(M_3(t) = 0 \wedge (M_1, M_2)[\{t\}])$

Su disparo da lugar al marcaje  $M' = (M'_1, M'_2, M'_3)$  definido de la forma siguiente:

1.  $(M'_1, M'_2)$  se obtienen en base a la regla de disparo vista para RPT.
2.  $M'_3 : T' \rightarrow \mathbb{N}^+$  está definida como sigue:

$$\forall t \in T', M'_3(t) = \begin{cases} M_3(t) - 1 & \text{si } M_3(t) \geq 1, R(t) = 0 \text{ y } (M'_1, M'_2)[\{t\}] \\ D(t) & \text{si } M_3(t) = 0 \text{ y } (M'_1, M'_2)[\{t\}] \\ D(t) & \text{si } M_3(t) > 0, R(t) > 0 \text{ y } (M'_1, M'_2)[\{t\}] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$\square$

Veamos que este modelo nos permite modelar Redes de Petri con arcos inhibidores. Para ello, tomamos la codificación vista para el caso del máximo paralelismo, asociamos un *time-out* igual a 1 a todas las transiciones  $t_p$  y modificamos la codificación en el caso de que  $p$  no sea arco inhibidor de  $t$  como sigue:

En lugar de conectar directamente la salida de  $t$  con  $p_{in}$ , introducimos un lugar asociado a  $t$ ,  $s_t$ , y una transición  $r_t$ , para no restaurar de forma inmediata los tokens sobre los lugares  $p_{in}$ . Se envía un token al lugar  $s_t$  cuando se ejecuta la transición  $t$ , que indica que debemos restaurar los tokens sobre los lugares  $p_{in}$  correspondientes.

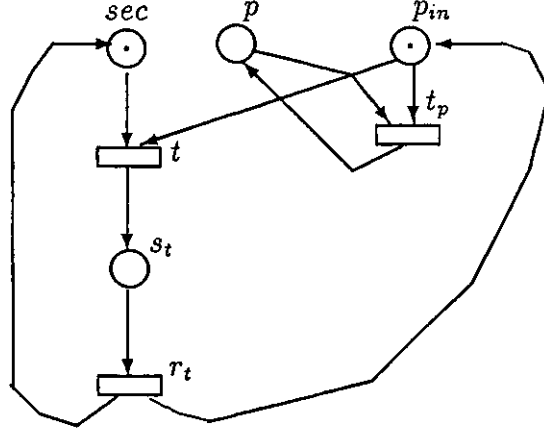


Figura 30: Modelado de Redes con Arcos Inhibidores con el Modelo 3 de *Time-Outs*

**Definición 6.7** Sea  $N = (P, T, F, A, M_0)$  una Red de Petri con Arcos Inhibidores. Definimos la RPTTO-3 asociada,  $N' = (P', T', T'', D', F', W', \delta', M'_0)$  de la forma siguiente:

$$P' = P \cup \{sec\} \cup P_{in} \cup S_T, \text{ donde:}$$

$$P_{in} = \{p_{in} \mid p \in P\}, S_T = \{s_t \mid t \in T\}$$

$$T' = T \cup T_P \cup T_R, \text{ donde:}$$

$$T_P = \{t_p \mid p \in P\}, T_R = \{r_t \mid t \in T\}$$

$$T'' = T_P$$

$$D'(t') = 1, \forall t' \in T''$$

$$F' = F|_{P \times T} \cup \{(sec, t), (t, s_t), (s_t, r_t), (r_t, sec) \mid t \in T\} \cup \\ \{(p_{in}, t_p), (p, t_p), (t_p, p) \mid p \in P\} \cup \{(r_t, q) \mid (t, q) \in F\} \cup \\ \{(p_{in}, t) \mid (p, t) \notin A\} \cup \{(r_t, p_{in}) \mid t \in T, (p, t) \notin A\}$$

$$W'(f') = 1, \forall f' \in F'$$

$$\delta'(t') = 1, \forall t' \in T'$$

$$M'_0(p') = \begin{cases} M_0(p) & \text{si } p' = p \in P \\ 1 & \text{si } p' = sec \vee p' \in P_{in} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

□

**Definición 6.8** (Correspondencia de Marcajes)

Sea  $N = (P, T, F, A, M_0)$  una red con arcos inhibidores,  $N' = (P', T', T'', D', F', W', \delta', M'_0)$  la red construida según la def. 6.7 y  $M$  un marcaje de  $N$ . Se define el marcaje correspondiente en  $N'$ ,  $\varphi_N(M)$ , de la forma siguiente:

$$\varphi_N(M)(p') = \begin{cases} M(p) & \text{si } p' = p \in P \\ 1 & \text{si } p' = \text{sec} \vee p' \in P_{in} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

□

**Teorema 6.1** Sea  $N = (P, T, F, A, M_0)$  una red con arcos inhibidores y  $N' = (P', T', T'', D', F', W', \delta', M'_0)$  la red construida según la def. 6.7. Entonces en  $N$  se tiene  $M[t]M'$  si y sólo si en  $N'$  existe una secuencia de pasos  $\sigma'$  tal que  $\varphi_N(M)[\sigma']_3 \varphi_N(M')$ , donde exactamente aparece una instancia de  $t$  en  $\sigma'$  y no hay otras transiciones de  $T$  en  $\sigma'$ .

**Demostración:**

$\Rightarrow$ : Sea  $t$  una transición permitida en  $N$ , y sea  $I(t)$  el conjunto de lugares inhibidores de  $t$ ,  $I(t) = \{p \in P \mid (p, t) \in A\}$ . Puesto que  $t$  está permitida en  $N$  hemos de tener  $M(p) = 0, \forall p \in I(t)$ . Por tanto:

$$\varphi_N(M)(p') = \begin{cases} M(p) & \text{si } p' = p \in P \wedge p \notin I(t) \\ 1 & \text{si } p' = \text{sec} \vee p' \in P_{in} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Entonces  $t$  está permitida en  $N'$ , pues sus precondiciones son  $\text{sec}$ , las precondiciones de  $t$  y los lugares  $p_{in}$  asociados a los lugares que no la inhiben, que están todos ellos marcados. Bajo el citado marcaje  $\varphi_N(M)$ , las transiciones  $t_p$  asociadas a los lugares  $p$  que inhiben a  $t$  no pueden ser disparadas pues el marcaje de dichos lugares es nulo. Por tanto, sólo podemos disparar  $t$  en  $N'$ , lo que desactiva de forma automática los *time-outs* de las  $t_p$  que sí estaban permitidas (las que están asociadas a lugares que inhiben a  $t$ ).

Tras el disparo de  $t$  en  $N'$  se obtiene el siguiente marcaje:

$$M'_1(p') = \begin{cases} M(p) - 1 & \text{si } p' = p \in P, p \in {}^\bullet t \\ M(p) & \text{si } p' = p \in P, p \notin {}^\bullet t, p \notin I(t) \\ 1 & \text{si } p' = s_t \vee p' = p_{in} \in P_{in}, \text{ para } (p, t) \in A \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Bajo el marcaje  $M'_1$  podemos disparar la transición  $r_t$ , y además, las transiciones  $t_p$  asociadas a los lugares  $p_{in}$  marcados siguen estando no permitidas, por lo que su *time-out* se mantiene desactivado. Tampoco podemos disparar ninguna transición de  $T$ , pues  $sec$  está desmarcado.

Tras el disparo de la citada transición  $r_t$  el marcaje será:

$$M'_2(p') = \begin{cases} M'_1(p) + 1 & \text{si } p' = p \in P, p \in t^\bullet \\ 1 & \text{si } p' = sec \vee p' = p_{in} \in P_{in}, \text{ para } (p, t) \notin A \\ 0 & \text{si } p' = s_t \\ M'_1(p') & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Además, no habrá cumplido ningún *time-out*. Ahora bien,  $M'_2 = \varphi_N(M')$ , y por tanto, hemos obtenido una secuencia de pasos  $\sigma'$  tal que  $\varphi_N(M)[\sigma']_3 \varphi_N(M')$ .

$\Leftarrow$ : Suponemos que existe  $\sigma'$  en las condiciones indicadas. Veamos cuál puede ser el primer paso en  $\sigma'$ , según la forma del marcaje  $\varphi_N(M)$ . En principio, el primer paso en  $\sigma'$  puede ser o bien la transición  $t$  o bien puede consistir en el disparo de una o varias transiciones  $t_p$ . Ahora bien, el disparo de una  $t_p$  bajo el marcaje  $\varphi_N(M)$  conduce a  $N'$  a un marcaje en el que el lugar  $p_{in}$  asociado a la transición  $t_p$  disparada ha perdido su token, y de hecho, dicho lugar permanecerá desmarcado en lo sucesivo, es decir, cualquier posible continuación de la secuencia no generará nunca un token sobre dicho lugar (ver la construcción). Por tanto, como  $\sigma'$  nos termina conduciendo por hipótesis a un marcaje  $\varphi_N(M')$  (en el que todos los lugares  $p_{in}$  están marcados), el primer paso de  $\sigma'$  no puede ser otro que el disparo de  $t$ . Además, para que  $t$  pueda ser disparada en  $N'$  bajo  $\varphi_N(M)$  es necesario que los lugares precondición estén marcados, lo que implica que los lugares precondición de  $t$  en  $N$  están marcados. En lo que respecta a los lugares inhibidores de  $t$ , su marcaje debe ser nulo, porque en otro caso la semántica impuesta en  $N'$  daría lugar al disparo simultáneo con  $t$  de las transiciones  $t_p$  asociadas a los lugares inhibidores de  $t$  que estuviesen marcados, o bien al cumplimiento de sus *time-outs*, si no se disparan simultáneamente con  $t$ . En el primer caso, el disparo de las  $t_p$  desmarca el lugar  $p_{in}$  asociado, quedando éste desmarcado en lo sucesivo. En el segundo caso se produciría el bloqueo semántico de la red. En definitiva, en cualquiera de los dos casos no podría alcanzarse el marcaje  $\varphi_N(M')$ . Por lo tanto,  $t$  está permitida en  $N$ .



Con el disparo de  $t$  se llega en  $N'$  a un marcaje  $M'_1$  idéntico al expuesto en la prueba del sentido directo. Bajo dicho marcaje sólo es posible disparar la transición  $r_t$ , lo cual conduce la red a un marcaje en el que el lugar  $sec$  está marcado, todos los lugares  $s_t$  están desmarcados y todos los lugares  $p_{in}$  están marcados. Es decir, se alcanza un marcaje  $M'_2$  para el que existe un  $M'$  tal que  $\varphi_N(M') = M'_2$ . De hecho, el marcaje  $M'$  no puede ser otro que el marcaje de la hipótesis, pues no podemos disparar nuevas transiciones sobre  $M'_2$ , ya que éstas tendrían que ser de  $T$ , y por hipótesis,  $t$  era la única transición de  $T$  en  $\sigma'$ .  $\square$

**Corolario 6.1** Sea  $N = (P, T, F, A, M_0)$  una red con arcos inhibidores y  $N' = (P', T', T'', D', F', W', \delta', M'_0)$  la red construida según la def. 6.7. Entonces en  $N$  existe una secuencia de ocurrencia  $\sigma = t_1 \dots t_n$  tal que  $M_0[\sigma]M$  si y sólo si en  $N'$  existe una secuencia de pasos  $\sigma' = R_1 \dots R_m$  tal que  $\varphi_N(M_0)[\sigma']_3 \varphi_N(M)$ , verificando:

- $\forall t \in T : \sigma(t) = \sigma'(t)$ , siendo  $\sigma(t)$  (resp.  $\sigma'(t)$ ) el número de ocurrencias de  $t$  en la secuencia  $\sigma$  (resp.  $\sigma'(t)$ ).
- $\forall t_i, t_j \in \sigma, i < j \Rightarrow \exists h, k$  tales que  $t_i \in R_h, t_j \in R_k, h < k$ .

$\square$

En consecuencia, este modelo nos permite codificar redes con arcos inhibidores, de lo que concluimos que el problema de alcance es indecidible también para este modelo.

**Proposición 6.3** El problema de alcance para RPTTO-3 es indecidible.  $\square$

### 6.1.3 Modelo estático, basado en las precondiciones

En este caso, un *time-out* se desactiva con el disparo de la transición y con la resolución de un conflicto estructural en el que la transición está involucrada, aunque hubiese suficientes tokens para dispararla simultáneamente al paso ejecutado. En la figura 28, si ponemos 3 tokens sobre el lugar  $p$ , entonces el disparo de  $t'$  desactiva el *time-out* de  $t$ , aunque haya suficientes tokens para disparar ambos.

**Definición 6.9** (Modelo 4)

Una Red de Petri Temporizada con Time-Outs de clase 4 (RPTTO-4) se define de una forma idéntica a la vista para el modelo 1:  $N = (P, T, T', D, F, W, \delta)$ .

Los marcajes para RPTTO-4 se definen exactamente igual que en la definición 6.1. □

**Definición 6.10** (Conflicto estructural)

Sea  $N$  una RPTTO-4. Dos transiciones  $t_1, t_2 \in T$  se dice que están en *conflicto estructural* si y sólo si existe al menos un lugar  $p \in P$  tal que  $(p, t_1), (p, t_2) \in F$ .

Para cada transición  $t \in T$  denotamos por  $C(t)$  al conjunto de transiciones en conflicto estructural con ella. Es decir,

$$C(t) \doteq \{t' \in T \mid t' \text{ está en conflicto estructural con } t\}$$

□

La notación que vamos a utilizar para especificar un paso en este modelo semántico será la siguiente:  $M[R]_4 M'$ .

**Definición 6.11** (Regla de Disparo para RPTTO-4)

Dada una RPTTO-4  $N$  y un marcaje de la misma  $M$ , decimos que un multiconjunto de transiciones  $R$  de  $T$  *está permitido bajo el modelo 4* sobre el marcaje  $M$ , lo que denotamos por  $M[R]_4$ , si satisface las condiciones siguientes:

1.  $M_1(p) \geq \sum_{t \in T} R(t) \cdot W(p, t), \forall p \in P$
2.  $\forall t \in T' : M_3(t) = 1 \Rightarrow (R(t) > 0 \vee \exists t' \in C(t), R(t') > 0)$

La segunda condición refleja la obligatoriedad de dispararse para las transiciones que llevan asociado un *time-out* al que queda una unidad de tiempo para cumplir, a menos que estén en conflicto estructural con alguna de las transiciones disparadas. El disparo de  $R$  da lugar al marcaje  $M' = (M'_1, M'_2, M'_3)$  definido de la forma siguiente:

1.  $(M'_1, M'_2)$  se obtienen en base a la regla de disparo para RPT:

$$(M_1, M_2)[R](M'_1, M'_2)$$

2.  $M'_3 : T' \longrightarrow \mathbb{N}^+$  está definida como sigue:

$$\forall t \in T', M'_3(t) = \begin{cases} M_3(t) - 1 & \text{si } M_3(t) > 1, R(t) = 0 \\ & \text{y } \forall t' \in C(t) : R(t') = 0 \\ D(t) & \text{si } M_3(t) = 0 \text{ y } (M'_1, M'_2)[\{t\}] \\ D(t) & \text{si } M_3(t) > 0, \text{ y } R(t) > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

□

Si asociamos un *time-out* igual a 1 a cada una de las transiciones de una red, entonces este modelo semántico captura (tomando la semántica que fuerza los disparos) un máximo paralelismo en el que únicamente se obliga a disparar conjuntos de transiciones que resuelvan los conflictos estructurales. No obstante, la construcción vista para codificar redes con arcos inhibidores mediante la semántica de máximo paralelismo es válida también para esta semántica, pues en dicha codificación no aparecían conflictos estructurales (excepto aquellos que ya tuviera la red de partida). Por tanto, el problema de alcance para este modelo semántico es de nuevo indecidible.

**Proposición 6.4** El problema de alcance para RPTTO-4 es indecidible. □

Si por el contrario consideramos que los *time-outs* tienen un carácter bloqueante, entonces obtenemos de nuevo marcapasos terminales que pueden ser identificados mediante el mismo mecanismo utilizado en los modelos anteriores. En consecuencia, el problema de alcance será de nuevo indecidible.

#### 6.1.4 Modelo Estático basado en las postcondiciones

Se trata de un modelo extraño, que considera la desactivación de un *time-out* según dos factores:

- La estructura de la red, materializada en los arcos y los pesos asociados a los mismos.
- La resolución de situaciones de conflicto estructural.

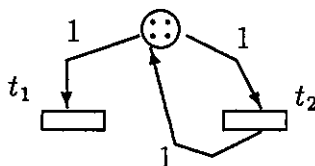


Figura 31: Ejemplo 1 del modelo Estático basado en postcondiciones

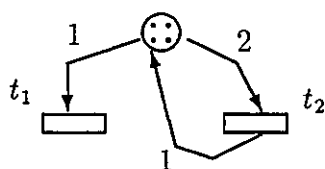


Figura 32: Ejemplo 2 del modelo Estático basado en postcondiciones

Cuando se plantea un conflicto estructural, un *time-out* se desactiva una vez resuelto el conflicto, sólomente si tras la ejecución del paso se han perdido tokens sobre uno de los lugares que motivó dicho conflicto estructural.

Por ejemplo, en la red de la figura 31, si la transición  $t_1$  lleva asociado un *time-out*, éste no se desactiva con el disparo de  $t_2$ . Sin embargo, en la red de la figura 32, el disparo de  $t_2$  desactiva el *time-out* de  $t_1$ .

De la misma forma que ocurría con el modelo dinámico basado en el estudio de las postcondiciones, la semántica de disparos maximales genera comportamientos extraños, de difícil estudio. En lo que respecta a la semántica de bloqueos, ésta nos permite seguir codificando redes con arcos inhibidores, siguiendo la misma construcción que la realizada para el modelo dinámico, basado en el estudio de las postcondiciones. De ahí concluimos de nuevo la indecidibilidad del problema de alcance para este modelo semántico.

## 6.2 Modelos de time-outs con transiciones especiales

En este caso, algunas transiciones de la red llevan asociada una transición especial (en un sentido que ahora precisaremos). Estas transiciones especiales son los *time-outs*, los cuales tienen las mismas precondiciones que las transiciones a las que

van asociadas, y su objetivo es fijar una conducta alternativa si cumple el tiempo máximo fijado para el disparo de la transición a la que van asociadas. Tras el disparo de una de estas transiciones el sistema continúa normalmente, reseteando el *time-out* de la transición. Este es el modelo de *time-out* adoptado en lenguajes de programación como Ada, donde se fija una conducta alternativa si cumple un tiempo máximo para que ocurra un evento.

**Definición 6.12** (RPT con Time-Outs con Transiciones Especiales)

Se define una RPT con Time-Outs con Transiciones Especiales (RPTTOE) como sigue:

$$N = (P, T, E, i, D, F, W, \delta)$$

siendo:

$P$  : conjunto de lugares

$T$  : conjunto de transiciones normales

$E$  : conjunto de transiciones especiales

$i : E \longrightarrow T$  (función de asociación de *time-outs* a transiciones)

$D : E \longrightarrow \mathbb{N}^+$  (tiempos de *time-out*)

$F \subseteq (P \times (T \cup E)) \cup ((T \cup E) \times P)$  (arcos)

$W : F \longrightarrow \mathbb{N}^+$  (pesos de los arcos)

$\delta : E \cup T \longrightarrow \mathbb{N}^+$  (duraciones de las transiciones)

donde  $i$  una función inyectiva y  $F$  cumple la siguiente condición:

$$\forall t' \in E : (p, t') \in F \text{ sii } (p, i(t')) \in F$$

Además,  $W(p, t') = W(p, i(t'))$ ,  $\forall t' \in E$ . □

Para estas redes podemos definir de nuevo cuatro modelos semánticos, de forma análoga a lo visto para los modelos sin transiciones especiales. En todos ellos se considera que el *time-out* (la transición especial) se dispara una vez que alcanza el valor 0 (si sigue permitida la transición). Por ello, los dos modelos basados en las postcondiciones generan de nuevo modelos extraños, y pueden plantearse situaciones confusas como las discutidas en los modelos sin transiciones especiales.

En los otros casos podemos usar el *time-out* para marcar un lugar especial, que ya no puede desmarcarse. Entonces, esto nos permite capturar los modelos

de *time-outs* sin transiciones especiales basados en el bloqueo semántico de la red. Por tanto, el problema de alcance es indecidible en todos ellos.

Como ejemplo presentamos el modelo dinámico basado en precondiciones.

**Definición 6.13** (Marcajes en el modelo de RPTTOE basado en precondiciones) Sea  $N = (P, T, E, i, D, F, W, \delta)$  una RPTTOE. Un marcaje para  $N$  es una terna  $M = (M_1, M_2, M_3)$  tal que:

1.  $M_1 \in \mathbb{N}^P$
2.  $M_2 : T \times \mathbb{N}^+ \longrightarrow \mathbb{N}$  tal que  $\forall t \in T$  y  $\forall \gamma \geq \delta(t) : M_2(t, \gamma) = 0$
3.  $M_3 : E \longrightarrow \mathbb{N}$ , verificando:
  - (a)  $M_3(t') = 0$ ,  $\forall t' \in E$  tal que  $\exists p \in P, M_1(p) < W(p, i(t'))$
  - (b)  $\forall t' \in E : (\forall p \in P, M_1(p) \geq W(p, i(t'))) \Rightarrow 0 < M_3(t') \leq D(t')$

Un marcaje puede ser *inicial* si cumple las dos condiciones siguientes:

1.  $M_2 = \emptyset$
2.  $\forall t' \in E : M_3(t') = \begin{cases} 0 & \text{si } \exists p \in P : M_1(p) < W(p, i(t')) \\ D(t') & \text{en caso contrario} \end{cases}$

□

**Definición 6.14** (Condición de Disparo)

Sea  $N = (P, T, E, i, D, F, W, \delta)$  una RPTTOE,  $M$  un marcaje de  $N$  y  $R$  un multi-conjunto de transiciones sobre  $T \cup E$ , satisfaciendo las condiciones siguientes:

1.  $M_1(p) \geq \sum_{t \in T \cup E} R(t) \cdot W(p, t)$
2.  $\forall t' \in E, R(t') \leq 1 \wedge (R(t') = 1 \Rightarrow M_3(t') = 1)$
3.  $\nexists t' \in E$  tal que  $M_3(t') = 1 \wedge (M_1, M_2)[R \cup \{i(t')\}] \wedge R(t') = 0$

Entonces se dice que  $R$  está permitido bajo el marcaje  $M$ , y se denota por  $M[R]_e$ . □

La primera condición es la usual, que refleja que  $R$  debe estar permitido en el sentido clásico. La segunda condición establece que para las transiciones especiales (los *time-outs*), sólo puede dispararse una instancia y además, sólo cuando el *time-out* vaya a cumplir. La tercera condición establece que si un *time-out* va a cumplir, estamos obligados a dispararlo, salvo que la transición correspondiente esté en conflicto con otras disparadas en  $R$ .

**Definición 6.15** (Regla de Disparo)

Sea  $N = (P, T, E, i, D, F, W, \delta)$  una RPTTOE,  $M$  un marcaje de  $N$  y  $R$  un multiconjunto de transiciones sobre  $T \cup E$  permitido bajo  $M$ . El disparo de  $R$  da lugar al marcaje  $M' = (M'_1, M'_2, M'_3)$  definido de la forma siguiente:

1.  $(M'_1, M'_2)$  se obtienen en base a la regla de disparo vista para RPT.
2.  $M'_3 : E \longrightarrow \mathbb{N}$  está definida como sigue:

$$M'_3(t') = \begin{cases} M_3(t') - 1 & \text{si } M_3(t') > 1, R(i(t')) = 0, \\ & (M_1, M_2)[R \cup \{i(t')\}] \\ D(t') & \text{si } M_3(t') = 0, (M'_1, M'_2)[\{i(t')\}] \\ D(t') & \text{si } M_3(t') > 0, R(i(t')) > 0, \\ & (M'_1, M'_2)[\{i(t')\}] \\ D(t') & \text{si } M_3(t') > 0, (M_1, M_2)[\{i(t')\}], \\ & \neg(M_1, M_2)[R \cup \{i(t')\}], (M'_1, M'_2)[\{i(t')\}] \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

□

# Capítulo 7

## Modelos de tiempo continuo

Al definir nuestro modelo de Redes de Petri Temporizadas hemos considerado un espacio de tiempos discreto, basándonos en la idea de que el funcionamiento de los ordenadores está controlado por un reloj que emite tics a intervalos regulares de tiempo. Sin embargo, podemos considerar también un modelo en el que el espacio de tiempo sea continuo. Para ello vamos a seguir dos pasos. En un primer paso consideramos un espacio de tiempos racionales, es decir, consideramos  $Q^+ \cup \{0\}$  como instantes posibles de tiempo. Veremos que este modelo puede ser codificado con nuestro modelo discreto de partida, lo que nos permite resolver casi todos los problemas de análisis planteados. Posteriormente, consideramos un espacio de tiempos en  $R^+$ , y veremos que en este caso las cosas se complican, y así sólo hemos podido demostrar la decidibilidad de algunos de los problemas de análisis planteados. Sin embargo, tampoco hemos podido probar hasta el momento la posible indecidibilidad de los mismos.

### 7.1 Sistema Racional de Tiempos

Consideraremos ahora una Red de Petri Temporizada como una tupla  $N = (P, T, F, W, \delta)$ , donde  $P, T, F$  y  $W$  tienen el significado habitual, pero  $\delta : T \longrightarrow Q^+$ .

El concepto de marcaje tiene ahora que ser un poco más fino, pues ahora el tiempo no corre como antes, tic a tic. Por tanto, no podemos considerar el efecto del disparo de un multiconjunto de transiciones sobre el instante siguiente



de tiempo, ya que esto carece ahora de sentido. Por otra parte, los marcajes siguen siendo dinámicos, ya que con el paso del tiempo van terminando transiciones que se encontraban a medias en su ejecución. Además, no podemos capturar esas variaciones dinámicas introduciendo pasos vacíos, pues carece de sentido hablar del “instante siguiente de tiempo”. Por tanto, los marcajes seguirán teniendo dos componentes, con el mismo significado que en Redes Temporizadas con duraciones enteras, pero ahora el efecto del disparo de un multiconjunto de transiciones hemos de reflejarlo de alguna forma en el mismo instante del disparo.

**Definición 7.1** (Marcajes de Redes de Petri Temporizadas)

Sea  $N = (P, T, F, W, \delta)$  una Red de Petri Temporizada con duraciones racionales. Un marcaje  $M$  para  $N$  es un par  $M = (M_1, M_2)$ , siendo  $M_1$  un marcaje en el sentido ordinario y  $M_2$  un multiconjunto que indica qué transiciones están en ejecución y los tiempos que les quedan para terminar. Además, imponemos la restricción de que  $\forall t \in T, \forall r \in Q^+, r > \delta(t) \Rightarrow M_2(t, r) = 0$ .

Un marcaje  $M$  puede ser inicial si y sólo si  $M_2 = \emptyset$ . □

Si no disparamos ninguna transición, la evolución dinámica de un marcaje  $M = (M_1, M_2)$  viene definida de la forma siguiente:

**Definición 7.2** (Función de evolución de marcajes)

Sea  $N$  una RPT con duraciones racionales y sea  $M = (M_1, M_2)$  un marcaje de la misma en un instante  $\beta$ . Entonces, si no disparamos ninguna transición entre medias, el marcaje en el instante  $\beta + \gamma$  es el siguiente:

$$Ev(M, \gamma) = (M'_1, M'_2)$$

siendo:

$$\bullet M'_1 = M_1 + \sum_{t \in C_1} \sum_{\alpha \in End(t, \gamma)} M_2(t, \alpha) \cdot W(t, -)$$

donde:

$$C_1 = \{t \in T \mid \exists \alpha \in Q^+ : M_2(t, \alpha) > 0 \wedge \alpha \leq \gamma\}$$

y para cada  $t \in C_1$  se define  $End(t, \gamma) = \{\alpha \in Q^+ \mid M_2(t, \alpha) > 0 \wedge \alpha \leq \gamma\}$ .

Este conjunto representa los tiempos para la finalización de las instancias en ejecución de la transición  $t$  a las que quedan menos de  $\gamma$  unidades de tiempo

para concluir. Así, el conjunto  $C_1$  contiene las transiciones con instancias pendientes en  $M$  cuya ejecución termina antes del instante  $\beta + \gamma$ .

- $M'_2(t, \beta') = M_2(t, \beta' + \gamma)$

□

La regla de disparo queda ahora como sigue:

**Definición 7.3** (Regla de disparo)

Sea  $N = (P, T, F, W, \delta)$  una Red de Petri Temporizada con duraciones racionales. Sea  $M = (M_1, M_2)$  un marcaje de  $N$  en un instante  $\beta$ . Un multiconjunto de transiciones  $R$  *está permitido* en un instante  $\beta + \gamma$  bajo el marcaje  $Ev(M, \gamma) = (M'_1, M'_2)$  si y sólo si:

$$M'_1(p) \geq \sum_{t \in T} R(t) \cdot W(p, t), \quad \forall p \in P$$

Si  $R$  se dispara en ese instante, entonces obtenemos *en ese mismo instante* el marcaje  $\tilde{M} = (\tilde{M}_1, \tilde{M}_2)$  dado por:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_1 &= M'_1 - \sum_{t \in T} R(t) \cdot W(-, t) \\ \tilde{M}_2(t, \beta') &= \begin{cases} R(t) & \text{si } \beta' = \delta(t) \\ M'_2(t, \beta') & \text{en caso contrario} \end{cases} \end{aligned}$$

Este paso se denota como sigue:  ${}_{\beta}M[R^{(\beta+\gamma)}]\tilde{M}$ . Extendemos la notación de la forma siguiente  ${}_{\beta}M[R^{(\beta+\gamma)}]_{\gamma'}\tilde{M}'$ , para indicar que  $\tilde{M}'$  es el marcaje alcanzado en el instante  $\gamma'$ , una vez que  $R$  fue disparada en el instante  $\beta + \gamma$ , siendo  $M$  el marcaje en el instante  $\beta$ ; es decir,  $\tilde{M}' = Ev(\tilde{M}, \gamma' - (\beta + \gamma))$ . Además, sólo permitimos un disparo en cada instante, lo que queda reflejado en la segunda condición de la siguiente definición. □

**Definición 7.4** (Secuencias de Pasos Temporizadas)

Sea  $N = (P, T, F, W, \delta)$  una RPT con duraciones racionales y  $M_0$  un marcaje inicial para  $N$ . Una secuencia de pasos temporizada de  $N$  a partir de  $M_0$  es una secuencia  $\sigma = M_0[R_1^{(\beta_1)}]_{\beta_2}M_1[R_2^{(\beta_2)}]_{\beta_3}\dots M_{n-1}[R_n^{(\beta_n)}]_{\beta_{n+1}}M_n$ , donde:

- $\forall i = 1, \dots, n$ ,  $R_i$  es un multiconjunto de transiciones no vacío sobre  $T$  y  $M_i$  es un marcaje de  $N$ .

- $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_{n+1}$
- $\forall i = 1, \dots, n : \beta_{i-1} M_{i-1} [R_i^{(\beta_i)}]_{\beta_{i+1}} M_i$ , tomando por definición  $\beta_0 = 0$ .

□

Para demostrar que podemos codificar las RPT con duraciones racionales con RPT con duraciones enteras vamos a demostrar el siguiente lema, el cual nos permite “ajustar” los instante de los disparos de los pasos a instantes múltiplos de un número racional concreto.

**Lema 7.1** Sea  $N = (P, T, F, W, \delta)$  una Red de Petri Temporizada con duraciones racionales. Sea  $T = \{t_1, \dots, t_m\}$  con  $\delta(t_i) = a_i/b_i$ , con  $a_i, b_i \in \mathbb{N}^+$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, m\}$  y sea  $c = mcm\{b_1, \dots, b_m\}$ .

Si  $M_0[R_1^{(\beta_1)}]_{\beta_2} M_1 \dots [R_n^{(\beta_n)}]_{\beta_{n+1}} M_n$  es secuencia de pasos de  $N$ , existe una secuencia de marcajes  $M'_0, \dots, M'_n$  en  $N$ , tal que  $M'_0[R_1^{(\beta'_1)}]_{\beta'_2} M'_1 \dots [R_n^{(\beta'_n)}]_{\beta'_{n+1}} M'_n$  es secuencia de pasos de  $N$ , siendo  $\beta'_i = \lceil \beta_i \cdot c \rceil / c$ , donde  $M'_0 = M_0$  y  $M'_{i_1} \geq M_{i_1}$ , con  $M_i = (M_{i_1}, M_{i_2})$ ,  $M'_i = (M'_{i_1}, M'_{i_2})$ .

**Demostración:** Empecemos analizando el primer paso. Es claro que podemos anticipar todo lo que queramos el disparo de  $R_1$ . En particular, podemos ajustar su disparo al instante  $\beta'_1$  indicado. Por otra parte, como las duraciones de las transiciones tienen en sus denominadores divisores de  $c$ , sus duraciones pueden ser expresadas de la forma siguiente:  $\delta(t_j) = x_j/c$ , con  $x_j \in \mathbb{N}^+$ . Por tanto, las transiciones disparadas en  $R_1$  han de terminar en instantes de la forma  $x/c$ , con  $x \in \mathbb{N}$ . En lo que respecta a la finalización de las transiciones, para cada transición  $t_k$  disparada en el instante  $\beta_1$  y cada  $\beta_j$ , con  $2 \leq j \leq n+1$  pueden presentarse dos casos:

1. Que  $t_k$  termine antes del instante  $\beta_j$ , es decir,  $\beta_1 + \delta(t_k) < \beta_j$ . En tal caso tenemos las tres desigualdades siguientes

$$\begin{aligned} \beta_1 + \frac{x_k}{c} &< \beta_j \\ d_j &< \frac{1}{c} \\ -d_1 &\leq 0 \end{aligned}$$

siendo  $d_i = \beta_i - \frac{\lceil \beta_i \cdot c \rceil}{c}$ . Sumando las desigualdades y pasando  $d_j$  al segundo miembro obtenemos:

$$\beta_1 - d_1 + \frac{x_k}{c} < \beta_j - d_j + \frac{1}{c}$$

Y como  $\beta'_i = \beta_i - d_i$ :

$$\beta'_1 + \delta(t_k) < \beta'_j + \frac{1}{c}$$

En consecuencia, como  $\beta'_1$  y  $\beta'_j$  son de la forma  $x/c$ , ha de ocurrir:

$$\beta'_1 + \delta(t_k) \leq \beta'_j$$

Por tanto,  $t_k$  termina ahora antes del instante  $\beta'_j$  o en dicho instante, lo que en todo caso no afecta al marcaje en el instante  $\beta_j$ .

2. Que  $t_k$  termine después del instante  $\beta_j$  o en dicho instante, es decir,  $\beta_1 + \delta(t_k) \geq \beta_j$ .

En tal caso tenemos las desigualdades siguientes:

$$\begin{aligned} d_1 &< \frac{1}{c} \\ -d_j &\leq 0 \\ \beta_j &\leq \beta_1 + \frac{x_k}{c} \end{aligned}$$

Sumando las desigualdades y pasando  $\beta_1$  al segundo miembro obtenemos:

$$\beta_j - d_j < \beta_1 - d_1 + \frac{x_k + 1}{c}$$

De ahí, como  $\beta'_1$  y  $\beta'_j$  son de la forma  $x/c$  obtenemos:

$$\beta'_j \leq \beta'_1 + \frac{x_c}{c}$$

Así pues, el disparo de la transición  $t_k$  en el instante  $\beta'_1$  puede terminar ahora en el instante  $\beta'_j$ . Ello puede traer como consecuencia que en ese instante tengamos más tokens sobre algunos lugares que los que teníamos con la secuencia de partida. En todo caso, eso no afecta a la posibilidad de disparo del multiconjunto  $R_j$ .

Extendemos el razonamiento por inducción como sigue: Suponemos (hipótesis de inducción) que el disparo de  $R_j$ , para  $j \leq i - 1$  ha sido desplazado al correspondiente instante  $\beta'_j$ . Además se supone que las transiciones en ejecución terminan todas ellas en instantes de la forma  $\frac{x}{c}$ , para  $x \in \mathbb{N}$ , y que  $M'_{k_1} \geq M_{k_1}$ , para  $k = 1, \dots, i$ .

Como  $M'_{i_1} \geq M_{i_1}$ , concluimos que  $R_i$  es disparable en el instante  $\beta'_i$ . De nuevo, como  $\beta'_i$  es de la forma  $\frac{p}{c}$ , las transiciones disparadas en  $R_i$  terminarán en instantes de la forma  $\frac{p}{c}$ . Además, para cada  $\beta_j$ , con  $i < j \leq n+1$ , por la hipótesis de inducción, las transiciones que estaban en ejecución que terminaban antes de dicho instante ahora terminan antes del instante  $\beta'_j$  o en dicho instante, y las que terminaban después o en ese instante ahora terminan después del instante  $\beta'_j$  o en dicho instante. En lo que respecta a las transiciones que han sido disparadas en  $R_i$ , se puede repetir el razonamiento realizado en el caso base de la inducción para demostrar que también cumplen lo anterior. En consecuencia, el marcaje  $M'_i$  alcanzado en el instante  $\beta'_{i+1}$  permite el disparo de  $R_{i+1}$ , pues tiene más tokens que  $M_{i_1}$ .  $\square$

**Definición 7.5** Sea  $N = (P, T, F, W, \delta, M_0)$  una RPT con duraciones enteras,  $M$  un marcaje de  $N$ ,  $R$  un multiconjunto de transiciones permitido bajo  $M$  y  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{N}$ ,  $\beta_1 < \beta_2$ .

Escribiremos  $M[R^{(\beta_1)}]_{\beta_2} M'$ , para significar que  $M'$  es el marcaje obtenido en el instante  $\beta_2$ , suponiendo que  $R$  haya sido disparado en el instante  $\beta_1$  bajo el marcaje  $M$ .

Mantendremos el criterio de que si  $\beta_2$  no aparece, éste se sobreentiende igual al instante  $\beta_1 + 1$ .  $\square$

**Definición 7.6** Sea  $N = (P, T, F, W, \delta)$  una RPT con duraciones racionales, con  $T = \{t_1, \dots, t_m\}$ ,  $\delta(t_i) = a_i/b_i$ , con  $a_i, b_i \in \mathbb{N}^+$ . Sea  $c = \text{mcm}\{b_1, \dots, b_m\}$  y sean las cantidades enteras  $c_i = (a_i/b_i)c$ . Definimos la RPT con duraciones enteras asociada a  $N$ ,  $\tilde{N}$ , de la forma siguiente  $\tilde{N} = (P, T, F, W, \tilde{\delta})$ , siendo  $\tilde{\delta}(t_i) = c_i$ .  $\square$

**Definición 7.7** Sea  $N = (P, T, F, W, \delta)$  una RPT con duraciones racionales,  $\tilde{N}$  la red con duraciones enteras asociada a  $N$ ,  $\sigma = M_0[R_1^{(\beta'_1)}]_{\beta'_2} M_1 \dots [R_n^{(\beta'_n)}]_{\beta'_{n+1}} M_n$  una secuencia de pasos de  $N$ , siendo  $\beta'_i = \beta_i/c$ , con  $\beta_i \in \mathbb{N}$ , para  $i = 1, \dots, n+1$ , y  $c$  definido como en la definición anterior.

Definimos los siguientes marcajes de  $N$  y  $\tilde{N}$  :

- (i) Para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  se define el marcaje  $\hat{M}_i = (\hat{M}_{i,1}, \hat{M}_{i,2})$  de  $N$ , que es el obtenido en el instante  $\beta'_i$  tras el disparo de  $R_i$  bajo el marcaje  $M_{i-1}$ .

(ii) Para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  se define el marcaje  $\bar{M}_i$  de  $N$  como sigue:

$$\bar{M}_{i,1} = \hat{M}_{i,1}, \quad \bar{M}_{i,2}(t, \gamma) = \hat{M}_{i,2}(t, \gamma/c), \quad \forall t \in T, \quad \forall \gamma \in Q^+$$

(iii) Para cada  $i \in \{0, \dots, n\}$  se define el marcaje  $\tilde{M}_i = (\tilde{M}_{i,1}, \tilde{M}_{i,2})$  de  $\tilde{N}$  como sigue:

$$\tilde{M}_i = Ev(\bar{M}_i, \beta_{i+1} - \beta_i)$$

siendo por definición  $\beta_0 = 0$ .

□

**Lema 7.2** Sea  $N = (P, T, F, W, \delta)$  una RPT con duraciones racionales y  $\tilde{N}$  la RPT con duraciones enteras asociada a  $N$ . Entonces  $M_0[R_1^{(\beta'_1)}]_{\beta'_2} M_1 \dots [R_n^{(\beta'_n)}]_{\beta'_{n+1}} M_n$  es secuencia de pasos de  $N$ , siendo  $\beta'_i = \beta_i/c$ , con  $\beta_i \in \mathbb{N}$ , para  $i = 1, \dots, n+1$ , si y sólo si  $\tilde{M}_0[R_1^{(\beta_1)}]_{\beta_2} \tilde{M}_1 \dots [R_n^{(\beta_n)}]_{\beta_{n+1}} \tilde{M}_n$  es secuencia de pasos en  $\tilde{N}$ , estando los marcajes  $\tilde{M}_i$ , para  $i = 0, \dots, n$ , definidos según la Def. 7.7.

Además,  $\tilde{M}_{i,1} = M_{i,1}$ , para  $i = 1, \dots, n$ .

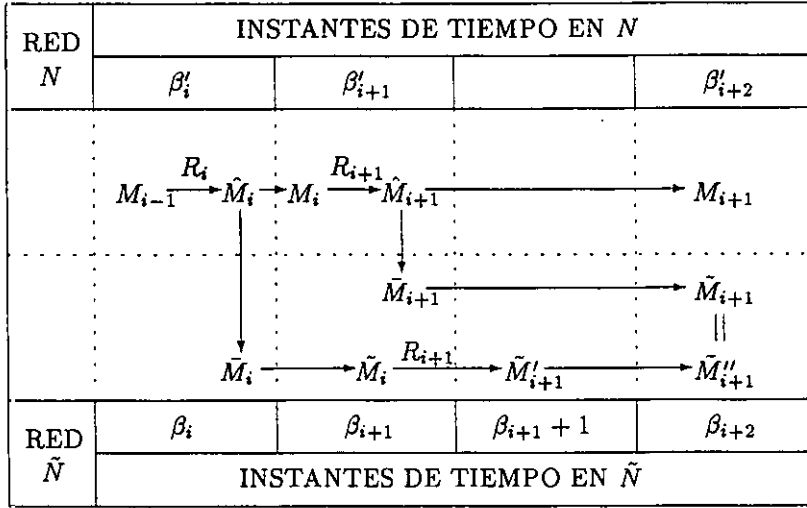
**Demostración:** El razonamiento es similar en ambas direcciones, por lo que sólo realizamos la demostración para el caso directo. Esta se basa en un razonamiento por inducción, para el cual consideramos las duraciones de las transiciones expresadas de la forma siguiente:  $\delta(t_k) = x_k/c$ .

Además, para facilitar el seguimiento de la demostración, en la figura 33 están representados los marcajes que utilizamos en  $N$  y  $\tilde{N}$  a lo largo de la demostración, con sus relaciones indicadas mediante arcos.

Para el caso base ( $n = 0$ ) el lema se cumple trivialmente. Supongamos entonces que  $\tilde{M}_i = Ev(\bar{M}_i, \beta_{i+1} - \beta_i)$  (el arco que conecta  $\bar{M}_i$  con  $\tilde{M}_i$  en la figura 33 refleja el paso del tiempo, mientras que el que conecta  $\hat{M}_i$  con  $\bar{M}_i$  refleja el cambio de escala para pasar de  $N$  a  $\tilde{N}$ ). Entonces, en primer lugar debemos demostrar que  $R_{i+1}$  está permitido bajo  $\tilde{M}_i$ . Para ello analizamos la primera componente de dicho marcaje:

$$\tilde{M}_{i,1} = \bar{M}_{i,1} + \sum_{t \in C_4} \sum_{\alpha \in End(t)} \bar{M}_{i,2}(t, \alpha) \cdot W(t, -)$$

siendo  $C_4 = \{t \in T \mid \exists \alpha \in Q^+, \bar{M}_{i,2}(t, \alpha) > 0 \wedge \alpha \leq \beta_{i+1} - \beta_i\}$  y  $End(t) = \{\alpha \in Q^+ \mid \bar{M}_{i,2}(t, \alpha) > 0 \wedge \alpha \leq \beta_{i+1} - \beta_i\}$ .

Figura 33: Marcajes de  $N$  y de  $\tilde{N}$ 

Desarrollando esta expresión obtenemos:

$$\tilde{M}_{i,1} = M_{i-1,1} - \sum_{t_k \in T} R_i(t_k) \cdot W(-, t_k) + \sum_{t_k \in C_4} \sum_{\alpha \in \text{End}(t_k)} \hat{M}_{i,2}(t_k, \alpha/c) \cdot W(t_k, -)$$

Aplicando la definición de  $\hat{M}_{i,2}$  obtenemos que  $\tilde{M}_{i,1} = M_{i,1}$ , por lo que concluimos que  $R_{i+1}$  está permitido bajo  $\tilde{M}_i$  en  $\tilde{N}$  ( $R_{i+1}$  está permitido bajo  $M_i$ , y su disparo en el instante  $\beta'_{i+1}$  produce en ese mismo instante el marcaje  $\hat{M}_{i+1}$ , situación que hemos indicado en la figura 33 mediante un arco conectando  $M_i$  y  $\hat{M}_{i+1}$  etiquetado con  $R_{i+1}$ ).

En lo que respecta a la segunda componente de  $\tilde{M}_i$  tenemos:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{i,2}(t_k, \gamma) &= \bar{M}_{i,2}(t_k, \gamma + \beta_{i+1} - \beta_i) = \hat{M}_{i,2}(t_k, \frac{\gamma + \beta_{i+1} - \beta_i}{c}) = \\ &\begin{cases} R_i(t_k) & \text{si } \frac{\gamma + \beta_{i+1} - \beta_i}{c} = \delta(t_k) \wedge R_i(t_k) > 0 \\ \bar{M}_{i-1,2}(t_k, \frac{\gamma + \beta_{i+1} - \beta_i}{c}) & \text{en caso contrario} \end{cases} \end{aligned}$$

Analicemos ahora el marcaje  $\tilde{M}'_{i+1}$ , obtenido en  $\tilde{N}$  tras el disparo de  $R_{i+1}$  bajo el marcaje  $\tilde{M}_i$  en el instante  $\beta_{i+1}$  (esta situación está de nuevo reflejada en la figura 33 mediante un arco que conecta ambos marcajes, estando este arco etiquetado por  $R_{i+1}$ ).

$$\begin{aligned} \bullet \quad \tilde{M}'_{i+1,1} &= \tilde{M}_{i,1} - \sum_{t \in T} R_{i+1}(t) \cdot W(-, t) + \sum_{t \in C_5} R_{i+1}(t) \cdot W(t, -) + \\ &\quad \sum_{(t,1) \in C_6} \tilde{M}_{i,2}(t, 1) \cdot W(t, -) \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \tilde{M}'_{i+1,2}(t_k, \gamma) = \begin{cases} R_{i+1}(t_k) & \text{si } \gamma = x_k - 1 \wedge R_{i+1}(t_k) > 0 \\ \tilde{M}_{i,2}(t_k, \gamma + 1) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$\forall k=1, \dots, m$

siendo  $C_5 = \{t_k \in T \mid \tilde{\delta}(t_k) = 1 \wedge R_{i+1}(t_k) > 0\}$ , y  $C_6 = \{(t_k, 1) \in T \times \mathbb{N} \mid \tilde{M}_{i,2}(t_k, 1) > 0\}$

Si desde el marcaje  $\tilde{M}'_{i+1}$  dejamos pasar  $\beta_{i+2} - \beta_{i+1} - 1$  pasos vacíos obtenemos el marcaje  $\tilde{M}''_{i+1}$  (lo que hemos reflejado en la figura 33 conectando ambos marcajes por un arco que señala el paso del tiempo), dado por:

$$\bullet \quad \tilde{M}''_{i+1,1} = \tilde{M}_{i,1} - \sum_{t \in T} R_{i+1}(t) \cdot W(-, t) + \sum_{t \in C_7} R_{i+1}(t) \cdot W(t, -) + \sum_{(t, \alpha) \in C_8} \tilde{M}_{i,2}(t, \alpha) \cdot W(t, -)$$

$$\bullet \quad \forall k = 1, \dots, m, \quad \tilde{M}''_{i+1,2}(t_k, \gamma) = \begin{cases} R_{i+1}(t_k) & \text{si } \gamma = x_k - (\beta_{i+2} - \beta_{i+1}) \wedge R_{i+1}(t_k) > 0 \\ \tilde{M}_{i,2}(t_k, \gamma + \beta_{i+2} - \beta_{i+1}) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

siendo  $C_7 = \{t_k \in T \mid \tilde{\delta}(t_k) = 1 \wedge R_{i+1}(t_k) > 0\}$ , y  $C_8 = \{(t_k, \alpha) \in T \times \mathbb{N} \mid \tilde{M}_{i,2}(t_k, \alpha) > 0 \wedge \alpha \leq \beta_{i+2} - \beta_{i+1}\}$ .

Analicemos ahora los marcajes de  $N$ . En primer lugar, el disparo de  $R_{i+1}$  bajo el marcaje  $M_i$  (en  $N$ ) en el instante  $\beta'_{i+1}$  genera en ese mismo instante el marcaje  $\hat{M}_{i+1}$  dado por:

$$\bullet \quad \hat{M}_{i+1,1} = M_{i,1} - \sum_{t \in T} R_{i+1}(t) \cdot W(-, t)$$

$$\bullet \quad \hat{M}_{i+1,2}(t_k, \gamma) = \begin{cases} R_{i+1}(t_k) & \text{si } \gamma = x_k/c \wedge R_{i+1}(t_k) > 0 \\ M_{i,2}(t_k, \gamma) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$\forall k=1, \dots, m$

De ahí obtenemos que:

$$\hat{M}_{i+1,2}(t_k, \gamma/c) = \begin{cases} R_{i+1}(t_k) & \text{si } \gamma = x_k \wedge R_{i+1}(t_k) > 0 \\ M_{i,2}(t_k, \gamma/c) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Consideremos entonces el marcaje  $\bar{M}_{i+1}$  obtenido sometiendo  $\hat{M}_{i+1}$  a un cambio de escala (en la figura 33 los cambios de escala están representados por arcos verticales). Este marcaje vendrá dado por

$$\bullet \quad \bar{M}_{i+1,1} = \hat{M}_{i+1,1}$$



- $\bar{M}_{i+1,2}(t, \gamma) = \hat{M}_{i+1,2}(t, \gamma/c)$

Si desde este marcaje (de  $\tilde{N}$ ) dejamos pasar  $\beta_{i+2} - \beta_{i+1}$  pasos vacíos, obtenemos el marcaje  $\tilde{M}_{i+1} = Ev(\bar{M}_{i+1}, \beta_{i+2} - \beta_{i+1})$  definido por

- $\tilde{M}_{i+1,1} = \bar{M}_{i+1,1} + \sum_{t \in C_9} \sum_{\alpha \in End(t)} \bar{M}_{i+1,2}(t, \alpha) \cdot W(t, -)$

- $\tilde{M}_{i+1,2}(t_k, \gamma) = \bar{M}_{i+1,2}(t_k, \gamma + \beta_{i+2} - \beta_{i+1})$

siendo  $C_9 = \{t_k \in T \mid \exists \alpha \in Q^+ : \bar{M}_{i+1,2}(t_k, \alpha) > 0 \wedge \alpha \leq \beta_{i+2} - \beta_{i+1}\}$ , y  $End(t_k) = \{\alpha \in Q^+ \mid \bar{M}_{i+1,2}(t_k, \alpha) > 0 \wedge \alpha \leq \beta_{i+2} - \beta_{i+1}\}$

Desarrollando  $C_9$ , y aplicando el resultado obtenido para  $\tilde{M}_{i,2}$ , obtenemos que  $\tilde{M}_{i+1,1} = \tilde{M}_{i+1,1}''$ .

Finalmente obtenemos:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{i+1,2}(t_k, \gamma) &= \bar{M}_{i+1,2}(t_k, \gamma + \beta_{i+2} - \beta_{i+1}) = \hat{M}_{i+1,2}(t_k, \frac{\gamma + \beta_{i+2} - \beta_{i+1}}{c}) = \\ &\begin{cases} R_{i+1}(t_k) & \text{si } \gamma + \beta_{i+2} - \beta_{i+1} = x_k \wedge R_{i+1}(t_k) > 0 \\ M_{i,2}(t_k, \frac{\gamma + \beta_{i+2} - \beta_{i+1}}{c}) & \text{en caso contrario} \end{cases} \end{aligned}$$

De ahí,  $\tilde{M}_{i+1,2}'' = \tilde{M}_{i+1,2}$ , por lo que  $\tilde{M}_{i+1} = \tilde{M}_{i+1}''$ , lo que concluye la demostración.  $\square$

**Corolario 7.1** Sea  $N = (P, T, F, W, \delta, M_0)$  una RPTM con duraciones racionales y  $\tilde{N}$  la RPTM con duraciones enteras asociada a  $N$ . Entonces un marcaje estable  $M$  es alcanzable en  $N$  en tiempo  $\beta$  si y sólo si es alcanzable en  $\tilde{N}$  en tiempo  $\lceil \beta \cdot c \rceil$ .

**Demostración:** Si  $M$  es alcanzable en  $N$  en tiempo  $\beta$ , entonces existe una secuencia de pasos  $\sigma = M_0[R_1^{(\beta_1)}]_{\beta_2} \dots [R_n^{(\beta_n)}]_{\beta_{n+1}} M_n$ , con  $\beta_{n+1} = \beta$ ,  $M_n = M$ , a la que podemos aplicar el lema 7.1, obteniendo de esa forma una secuencia de pasos  $\sigma' = M'_0[R_1^{(\beta'_1)}]_{\beta'_2} \dots [R_n^{(\beta'_n)}]_{\beta'_{n+1}} M'_n$ . Además,  $M'_{n,1} \geq M_{n,1}$ , y de hecho, la diferencia de tokens en algunos lugares era debida únicamente a la anticipación en la terminación de algunas transiciones con relación a algún  $\beta_j$  posterior. Como este no puede ser el caso para  $\sigma$ , pues  $M_n$  es estable, necesariamente ha de ocurrir que  $M_{n,1} = M'_{n,1}$  y  $M_{n,2} = M'_{n,2} = \emptyset$  (las transiciones no terminan en ningún caso después de  $\beta'_{n+1}$ ). En consecuencia,  $M_n$  es alcanzable en  $N$  en tiempo  $\lceil \beta_{n+1} \cdot c \rceil / c$ , a través de una secuencia de pasos con disparos en tiempos de la forma  $x/c$ . Por

tanto,  $M$  es alcanzable en  $\tilde{N}$  en el instante  $[\beta.c]$ , lo que se obtiene aplicando el lema 7.2.

Recíprocamente, si  $M$  es alcanzable en  $\tilde{N}$  en tiempo  $[\beta.c]$ , entonces aplicando el lema 7.2 obtenemos que también es alcanzable en  $N$  en tiempo  $[\beta.c]/c$  (en la demostración del lema se obtuvo que  $M_{i,1} = \tilde{M}_{i,1}$ ), y por tanto, también es alcanzable en tiempo  $\beta$ .  $\square$

**Corolario 7.2** Sea  $N = (P, T, F, W, \delta, M_0)$  una RPTM con duraciones racionales y  $\tilde{N}$  la RPTM con duraciones enteras asociada a  $N$ . Entonces un marcaje  $M$  es alcanzable en  $N$  en tiempo  $\beta$  si y sólo si  $M'$  es alcanzable en  $\tilde{N}$  en tiempo  $[\beta'.c]$ , siendo  $M'$  el marcaje estable obtenido omitiendo los disparos de las transiciones que se encuentran en ejecución en  $M$ , y  $\beta'$  el instante en que  $M'$  es obtenido.

**Demostración:** La obtención de  $M'$  a partir de  $M$  es trivial, así como la obtención de  $\beta'$ . Como  $M'$  es estable, tenemos que  $M'$  es alcanzable en  $N$  en tiempo  $\beta'$  si y sólo si es alcanzable en  $\tilde{N}$  en tiempo  $[\beta'.c]$ , por el corolario 7.1. Ahora bien, es claro que  $M$  es alcanzable en tiempo  $\beta$  si y sólo si  $M'$  es alcanzable en tiempo  $\beta'$ , por tanto  $M$  es alcanzable en  $N$  en tiempo  $\beta$  si y sólo si  $M'$  es alcanzable en  $N'$  en tiempo  $[\beta'.c]$ .  $\square$

Este corolario nos permite concluir de forma inmediata que el problema de alcance, la vivacidad, el problema de alcance estricto, la ausencia de bloqueos y la ausencia de  $\beta$ -bloqueos son decidibles en Redes de Petri Temporizadas con duraciones racionales, pues estos problemas se trasladan a los mismos problemas sobre redes con duraciones enteras, para las cuales sabemos que son decidibles. Veamos a continuación que también la  $\beta$ -vivacidad es decidible para las Redes con duraciones racionales.

**Teorema 7.1** Sea  $N = (P, T, F, W, \delta, M_0)$  una RPTM con duraciones racionales y  $\tilde{N}$  la RPTM con duraciones enteras asociada a  $N$ . Entonces  $N$  es  $\beta$ -viva si y sólo si  $\tilde{N}$  es  $[\beta.c]$ -viva.

**Demostración:**

$\Rightarrow$ : Sea  $t \in T$ ,  $\tilde{M}$  un marcaje alcanzable en  $\tilde{N}$  y  $\tilde{\gamma} \in \mathbb{N}^+$  tal que  $\tilde{M} \in [M_0]_{\tilde{\gamma}}$ . Consideremos la secuencia de pasos que nos conduce a  $\tilde{M}$  en  $\tilde{N}$ :

$$\tilde{M}_0 [R_1^{(\beta_1)}] \tilde{M}_1 \dots [R_n^{(\beta_n)}]_{\beta_{n+1}} \tilde{M}_n$$

siendo  $\tilde{M}_n = \tilde{M}$ ,  $\beta_{n+1} = \tilde{\gamma}$ , y  $\tilde{M}_0 = M_0$ .

Entonces, por el lema 7.2 tenemos en  $N$ :

$$M_0[R_1^{(\beta_1/c)}]_{\beta_2/c} M_1 \dots [R_n^{(\beta_n/c)}]_{\beta_{n+1}/c} M_n$$

siendo  $M_i$  un marcaje tal que  $\tilde{M}_i = Ev(\tilde{M}_i, \beta_{i+1} - \beta_i)$ , con  $\tilde{M}_{i,1} = \hat{M}_{i,1}$ ,  $\tilde{M}_{i,2}(t, \alpha) = \hat{M}_{i,2}(t, \alpha/c)$ , donde  $\hat{M}_i$  es el marcaje de  $N$  obtenido en el instante  $\beta_i/c$  al disparar  $R_i$ . Además  $M_{i,1} = \tilde{M}_{i,1}$ , para  $i = 1, \dots, n$ . Por tanto,  $M_{n,1} = \tilde{M}_{n,1} = \tilde{M}_1$ .

Como  $N$  es  $\beta$ -viva, existe una secuencia de pasos que parte de  $M_n$  y nos conduce en tiempo  $\beta$  a un marcaje  $M'$  que permite el disparo de  $t$ . Es decir:

$$\dots M_n[R_{n+1}^{(r_1)}]_{r_2} M_{n+1} \dots [R_{n+s}^{(r_s)}]_{\beta+\beta_{n+1}/c} M_{n+s}$$

siendo  $M_{n+s} = M'$ . Como  $\beta_{n+1} = \tilde{\gamma}$ , tenemos que  $M'$  es alcanzable en el instante  $\beta + \tilde{\gamma}/c$ . Por el lema 7.1 concluimos la existencia de marcajes  $\bar{M}_0, \dots, \bar{M}_{n+s}$  tales que:

$$\bar{M}_0[R_1^{(\beta_1/c)}]_{\beta_2/c} \bar{M}_1 \dots \bar{M}_n[R_{n+1}^{(r'_1)}]_{r'_2} \bar{M}_{n+1} \dots [R_{n+s}^{(r'_s)}]_{r'_{s+1}} \bar{M}_{n+s}$$

donde  $r'_i = \lceil r_i \cdot c \rceil / c$  y  $\bar{M}_{n+i,1} \geq M_{n+i,1}$ , para  $i = 1, \dots, s$ . Además, de la prueba de dicho lema es fácil deducir que  $\bar{M}_i = M_i$ , para  $i = 0, \dots, n$ .

En particular tenemos que  $\bar{M}_{n+s,1} \geq M_{n+s,1} = M'_1$ . Por tanto,  $t$  está permitida bajo el marcaje  $\bar{M}_{n+s}$ . Además,

$$r'_{s+1} = \lceil (\beta + \tilde{\gamma}/c)c \rceil / c = (\lceil \beta \cdot c \rceil + \tilde{\gamma})/c = \tilde{\gamma}/c + \lceil \beta \cdot c \rceil / c$$

Esto se traslada de forma inmediata a  $\tilde{N}$  aplicando el lema 7.2.

$\Leftarrow$ : Supongamos ahora que  $\tilde{N}$  es  $\lceil \beta \cdot c \rceil$ -viva, y sea  $t \in T$ ,  $M$  un marcaje alcanzable en  $N$  y  $\gamma \in Q^+$  el instante en que alcanzamos  $M$ . Supongamos por el momento que  $M$  es estable y sea la secuencia de pasos que nos permite alcanzar  $M$ :

$$M_0[R_1^{(\beta_1)}]_{\beta_2} M_1 \dots [R_n^{(\beta_n)}]_{\beta_{n+1}} M_n$$

siendo  $\beta_i \in Q^+$ , para  $i = 1, \dots, n+1$ ,  $M_n = M$  y  $\beta_{n+1} = \gamma$ . Aplicando el lema 7.1 concluimos la existencia de marcajes  $M'_0, \dots, M'_n$  tales que:

$$M'_0[R_1^{(\beta'_1)}]_{\beta'_2} M'_1 \dots [R_n^{(\beta'_n)}]_{\beta'_{n+1}} M'_n$$

siendo  $\beta'_i = \lceil \beta_i.c \rceil / c$ , para  $i = 1, \dots, n+1$  y  $M'_{i,1} \geq M_{i,1}$ , para  $i = 1, \dots, n$ . Además, como  $M_n$  es estable tenemos  $M'_{n,1} = M_{n,1}$ . Aplicando el lema 7.2 podemos trasladar esta secuencia a  $\tilde{N}$ , obteniéndose:

$$\tilde{M}_0[R_1^{(\beta''_1)}] \tilde{M}_1 \dots \tilde{M}_{n-1}[R_n^{(\beta''_n)}]_{\beta''_{n+1}} \tilde{M}_n$$

donde  $\beta''_i = \beta'_i.c$ , para  $i = 1, \dots, n+1$ . Además tenemos  $\tilde{M}_{n,1} = M'_{n,1} = M_{n,1} = M_1$  (primera componente de  $M$ ).

Como  $\tilde{N}$  es  $\lceil \beta.c \rceil$ -viva existe una secuencia que parte de  $\tilde{M}_n$  y nos conduce en tiempo  $\lceil \beta.c \rceil$  a un marcaje que permite el disparo de  $t$ :

$$\tilde{M}_n[R_{n+1}^{(\beta''_{n+1})}] \tilde{M}_{n+1} \dots [R_{n+s}^{(\beta''_{n+s})}]_{\beta''_{n+1} + \lceil \beta.c \rceil} \tilde{M}_{n+s}$$

donde  $\tilde{M}_{n+s}[t]$ .

Aplicando el lema 7.2 trasladamos esa secuencia a  $N$ , con lo que tenemos un marcaje  $M'_{n+s}$  alcanzable en tiempo  $(\lceil \beta''_{n+1} \rceil + \lceil \beta.c \rceil)/c = \beta'_{n+1} + (\lceil \beta.c \rceil)/c = (\lceil \beta_{n+1}.c \rceil + \lceil \beta.c \rceil)/c = (\lceil \gamma.c \rceil + \lceil \beta.c \rceil)/c$  que permite el disparo de  $t$ .

Además, esa secuencia pasará por  $M'_n$ , lo que significa que ese marcaje se alcanza desde  $M'_n$  en  $\lceil \beta.c \rceil / c$  unidades de tiempo. Esos pasos pueden hacerse también desde ese marcaje  $M'_n$ , pero en el instante  $\gamma$ , con lo que en  $\lceil \beta.c \rceil / c$  unidades de tiempo tendremos un marcaje que permite  $t$ . Como  $\lceil \beta.c \rceil / c < \beta$ , se tiene que en particular en  $\beta$  unidades de tiempo podemos alcanzar un marcaje que permite ejecutar  $t$ .

Si el marcaje  $M$  de partida no fuera estable, podemos considerar el marcaje estable  $M' = (M_1, \emptyset)$ . Para él podemos aplicar el razonamiento anterior, con lo que encontramos un marcaje  $M'' \in [M']_\beta$  tal que  $M''[t]$ . Entonces la misma secuencia de pasos la podemos ejecutar desde  $M$ , obteniéndose incluso marcajes intermedios con más tokens. Se obtiene así que existe  $M''' \in [M]_\beta$  tal que  $M'''[t]$ , lo que concluye la prueba.  $\square$

Sin embargo, esta codificación no es de utilidad para resolver las dos extensiones temporizadas de la propiedad de ilimitación, al no preservar dichas propiedades. Ello se debe al cambio de escala que la codificación introduce. Como ejemplo podemos considerar la red  $N$  de la figura 34, la cual es  $s, k$ -ilimitada linealmente, para cualquier  $k$ . Sin embargo, la red con duraciones enteras asociada  $\tilde{N}$  (ver figura 35) no es  $s, k$ -ilimitada linealmente para ningún  $k$ .

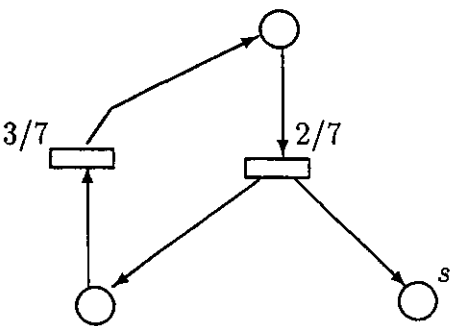


Figura 34: Red  $N$

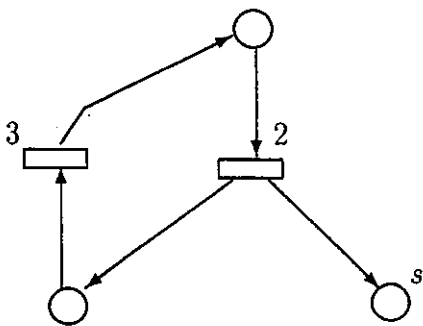


Figura 35: Red  $\tilde{N}$  asociada a  $N$

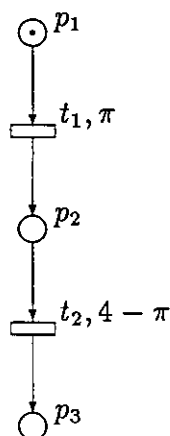


Figura 36: Red de Petri con Duraciones Reales

## 7.2 Sistema Real de Tiempos

Consideremos ahora un sistema real de tiempos. Así, una Red de Petri Temporizada es ahora una tupla  $N = (P, T, F, W, \delta)$ , donde  $P, T, F$  y  $W$  tienen el significado habitual y  $\delta : T \rightarrow R^+$ .

El concepto de marcaje se define de la misma forma que en el caso del sistema racional de tiempos, por lo que ya no lo repetimos. Lo mismo sucede con la regla de disparo y las secuencias de pasos.

Es claro sin embargo que no es posible aplicar las ideas que allí hemos utilizado para codificar estas redes en términos de Redes Temporizadas con un sistema discreto de tiempos. De hecho, no podemos pensar ni tan siquiera en una *leve* modificación de los instantes de disparo, para ajustarlos a instantes racionales cercanos, pues con ello podemos perder algunos marcajes alcanzables.

Por ejemplo, en la red de la figura 36 es imposible anticipar los disparos de las transiciones, pues el marcaje  $(0, 0, 1)$  es alcanzable en el instante 4, pero no antes.

No obstante, una nueva codificación basada en una aproximación completamente diferente nos ha permitido resolver algunos de los problemas de análisis planteados. En concreto, la codificación se basa en el conocimiento del instante simbólico (medimos el tiempo tomando como unidades las duraciones de las transiciones) en el que se produce cada token, y así no se produce una simulación “en tiempo real” del funcionamiento de la red original, sino que se permite un disparo desordenado en el tiempo de las transiciones. Una limitación importante de la

codificación es que exige una limitación finita del periodo de tiempo a simular, pues de lo contrario obtendríamos una red infinita.

**Definición 7.8** Sea  $N = (P, T, F, W, \delta, M_0)$  una Red de Petri Temporizada Marcada con duraciones reales y  $\beta$  un instante real dado. Asociamos al par  $(N, \beta)$  una Red de Petri Coloreada  $N'_\beta$  basada en la propia red  $N$ , pero sin tiempos,  $N'_\beta = (P, T, F, W, M_0)$ . Ahora bien, los tokens de  $N'_\beta$  vendrán etiquetados por tuplas  $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{N}^n$ , donde  $n = |T|$  y  $\sum c_i \cdot \delta(t_i) \leq \beta$ , que codifican el instante de tiempo en el que han sido producidos. Cada anotación es un vector de  $n$  componentes, uno por transición, que indica cuántas copias de cada transición han sido disparadas (en secuencia) hasta la obtención de ese token. En realidad, se anota la serie de transiciones que tienen una duración más larga (disparadas en secuencia). Por supuesto, los tokens del marcaje inicial tienen como anotación la tupla  $(0, \dots, 0)$ .

En lo sucesivo denotaremos por  $\mathcal{C}$  al conjunto de posibles anotaciones de un token, y por  $n(p, c)$  al número de tokens sobre el lugar  $p$  con anotación  $c$ . Para cada etiqueta  $c \in \mathcal{C}$  definimos el "instante de disponibilidad" del token correspondiente como sigue:

$$\tilde{c} = \sum_{h=1}^n c_h \cdot \delta(t_h)$$

que recoge la suma de las duraciones de las transiciones incluidas en su anotación. A partir de dicho concepto podemos definir un preorden sobre los tokens de la forma siguiente:  $c^1 \leq c^2$  si y sólo si  $\tilde{c}^1 \leq \tilde{c}^2$ .

La regla de disparo de la nueva red  $N'_\beta$  se define como sigue:

Sea  $M$  un marcaje de  $N'_\beta$  y  $t \in T$ , con  $\bullet t = \{p_1, \dots, p_k\}$  y  $t^\bullet = \{p'_1, \dots, p'_l\}$ ; y sean  $W(p_j, t) = n_j$ , para  $j = 1, \dots, k$  y  $W(t, p'_h) = m_h$ , para  $h = 1, \dots, l$ . De cara a disparar  $t$  se precisa en primer lugar que la misma esté permitida según el concepto ordinario de activación. Si  $t$  está permitida en dicho sentido es porque en cada lugar  $p_j$  hay al menos  $n_j$  tokens. Consideremos para cada uno de esos lugares  $p_j$  los  $n_j$  tokens que pretendamos utilizar en el disparo, y supongamos que llevan como anotaciones los vectores de  $C_j = \{c_1^j, \dots, c_{n_j}^j\}$ . Definimos  $C = \bigcup_{j=1}^k C_j$ , y

$$Max(C) = \max_{i,j} \{\tilde{c}_j^i\}$$

que representa el primer instante posible de disparo de  $t$ , utilizando los tokens escogidos. El disparo será entonces admisible si  $Max(C) + \delta(t) \leq \beta$ . En tal

caso su efecto consistirá en sustraer de cada lugar  $p_j$  los  $n_j$  tokens considerados, generándose nuevos tokens sobre los lugares postcondición, todos ellos anotados por

$$c' = c_j^i + \chi(t)$$

donde  $\chi(t)$  es el vector característico de  $t$ ; así, si  $t = t_s$  se tiene  $\chi(t_s) = (0, \dots, 0, \overset{s}{1}, 0, \dots, 0)$ , y  $c_j^i$  es la etiqueta en la que se alcanza el máximo de  $C$ , esto es  $\tilde{c}_j^i = \text{Max}(C)$ . Es decir, anotamos como “historia” de estos tokens la historia de su token precondition más tardía, prolongada por la transición disparada  $t$ .

Denotamos esta evolución por  $M[t]_c M'$ . □

Esta red así construida,  $N'_\beta$ , nos permite capturar los marcajes estables alcanzables en la red original hasta el instante  $\beta$ . Ello nos permite resolver algunos de los problemas de análisis que hemos definido.

## 7.3 Análisis de Problemas

Exactamente como hicimos para las Redes de Petri Temporizadas con duraciones enteras, es posible demostrar la decidibilidad del problema de alcance mediante la secuencialización de todos los pasos. También podemos demostrar la decidibilidad del problema de alcance estricto si no hay transiciones autónomas limitándonos para ello a inspeccionar el árbol de accesibilidad. De nuevo pues, las dificultades se limitan al caso general, en el que permitimos la existencia de dichas transiciones autónomas. De cara a la resolución de este problema es precisamente para lo que hemos introducido la construcción anterior.

Dicha construcción nos ha producido una Red de Petri Coloreada. Ahora bien, es bien sabido que al habernos limitado a un número finito de colores (razón por la cual utilizamos  $\beta$  en la construcción) podemos representar esta red por medio de otra con una semántica de ocurrencia ordinaria. Para ello duplicamos los lugares y transiciones, en función de todas las posibles etiquetas de los tokens. En concreto, extraemos una copia de cada lugar por cada etiqueta, incluyendo para cada transición tantas copias como formas distintas tengamos de activar la transición original de la red coloreada en virtud de la regla de disparo definida anteriormente.



Veamos esta codificación más formalmente.

**Definición 7.9** (Codificación de la semántica de anotaciones con la semántica ordinaria de secuencias de ocurrencia) Sea  $N = (P, T, F, W, \delta)$  una Red de Petri Temporizada con duraciones reales,  $\beta$  un instante real dado y  $M_0$  un marcaje inicial de  $N$ . Sea entonces  $N'_\beta = (P, T, F, W, M_0)$  la red coloreada asociada según la definición 7.8 y  $\mathcal{C}$  el conjunto de posibles etiquetas de los tokens de  $N'_\beta$ . Definimos la red de Petri  $N''_\beta = (P'', T'', F'', W'', M''_0)$  con la semántica ordinaria de secuencias de ocurrencia de la forma siguiente:

$$P'' = P \cup \bigcup_{c \in \mathcal{C}} P_c, \text{ siendo } P_c = \{(p, c) \mid p \in P\}$$

$$T'' = \bigcup_{t \in T} \{(x, t) \mid x \in A(t)\}, \text{ siendo } A(t) = \{((p_1, c_1^1), \dots, (p_1, c_{n_1}^1), \\ (p_2, c_1^2), \dots, (p_2, c_{n_2}^2), \dots, (p_k, c_{n_k}^k)) \mid c_i^h \in \mathcal{C}, 1 \leq h \leq k, 1 \leq i \leq n_h \\ \text{y } \text{Max}\{c_i^h\} + \delta(t) \leq \beta\}, \text{ con } t^* = \{p_1, \dots, p_k\}, \text{ y } n_j = W(p_j, t), \\ \text{para } 1 \leq j \leq k$$

$$F'' = \{(p, (x, t)) \mid (p, t) \in F, (x, t) \in T''\} \cup \{((x, t), p) \mid (t, p) \in F, (x, t) \in T''\} \cup \\ \{((p, c), (x, t)) \mid (p, c) \in P_c, (x, t) \in T'', \exists h \text{ tal que } (p, c) = x_h\} \cup \\ \{((x, t), (p, c)) \mid (p, c) \in P_c, (x, t) \in T'', p \in t^*, c \text{ es la etiqueta obtenida} \\ \text{tras el disparo de } t \text{ bajo la configuración de tokens } x\}$$

$$W''(f) = \begin{cases} |\{h \mid c_h^j = c_{h_0}^j, ((p_j, c_h^j), (x, t)) \in F''\}| & \text{si } f = ((p_j, c_{h_0}^j), (x, t)), \text{ con} \\ & h_0 \in \{1, \dots, n_j\} \text{ y } j \in \{1, \dots, k\} \\ W(t, p) & \text{si } f = ((x, t), (p, c)) \vee f = ((x, t), p) \\ W(p, t) & \text{si } f = (p, (x, t)) \end{cases}$$

$$M''_0(p') = \begin{cases} M_0(p) & \text{si } p' = p \in P \vee p' = (p, (0, \dots, 0)) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

□

**Definición 7.10** Sea  $N = (P, T, F, W, \delta, M_0)$  una Red de Petri Temporizada Marcada con duraciones reales,  $\beta$  un instante real dado,  $N'_\beta = (P, T, F, W, M_0)$  la red coloreada asociada según la definición 7.8 y  $N''_\beta = (P'', T'', F'', W'', M''_0)$  la Red de Petri No Temporizada asociada a  $N'_\beta$  según la definición 7.9.

Definimos la función  $\varphi : \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M}''$ , donde  $\mathcal{M}'$  es el conjunto de marcajes

de  $N'_\beta$  y  $\mathcal{M}''$  es el conjunto de marcajes de  $N''_\beta$ , de la forma siguiente:

$$\forall M \in \mathcal{M}', \forall p' \in P'', \varphi(M)(p') = \begin{cases} M(p) & \text{si } p' = p \in P \\ n(p, c) & \text{si } p' = (p, c) \in P_c \end{cases}$$

□

**Teorema 7.2** Sea  $N = (P, T, F, W, \delta, M_0)$  una Red de Petri Temporizada Marcada con duraciones reales,  $\beta$  un instante real dado,  $N'_\beta = (P, T, F, W, M_0)$  la red coloreada asociada según la definición 7.8,  $N''_\beta = (P'', T'', F'', W'', M''_0)$  la Red de Petri No Temporizada asociada a  $N'_\beta$  según la definición 7.9,  $t \in T$  y  $M, M'$  dos marcajes de  $N'_\beta$ .

Entonces  $M[t]_c M'$  ocurre en  $N'_\beta$  si y sólo si  $\varphi(M)[(x, t)]\varphi(M')$  ocurre en  $N''_\beta$ , para una cierta  $x \in A(t)$ .

**Demostración:** Supongamos que  $M[t]_c M'$  ocurre en  $N'_\beta$ , y sean  ${}^*t = \{p_1, \dots, p_k\}$ ,  $t^\bullet = \{p'_1, \dots, p'_l\}$ ,  $n_j = W(p_j, t)$ ,  $m_j = W(t, p'_j)$ . Sean  $c^j_1, \dots, c^j_{n_j}$  las etiquetas de los  $n_j$  tokens de  $p_j$  utilizados en el disparo de  $t$ .

Consideremos  $x = ((p_1, c^1_1), \dots, (p_1, c^1_{n_1}), \dots, (p_k, c^k_1), \dots, (p_k, c^k_{n_k}))$ . Entonces,  $(x, t) \in T''$ , pues el disparo de  $t$  es admisible en  $N'_\beta$ . Esta transición está además permitida pues los lugares  $p_j$  tienen el mismo marcaje que sus originales en  $N'_\beta$  y cada lugar  $(p_j, c^j_h) \in P''$ , para  $j \in \{1, \dots, k\}$ ,  $h \in \{1, \dots, n_j\}$  está marcado con el número de tokens de  $M(p_j)$  cuya anotación sea  $c^j_h$ , y el arco  $((p_j, c^j_h), (x, t))$  tiene por peso el número de etiquetas  $c^j_i$  iguales a  $c^j_h$ .

El efecto del disparo de  $(x, t)$  sobre los lugares de  $P \subseteq P''$  es idéntico al del disparo de  $t$  en  $N'_\beta$  (abstrayendo los colores). Sobre los lugares  $(p_j, c^j_h)$  su efecto es sustraer un número de tokens igual al número de etiquetas  $c^j_i$  tales que  $c^j_i = c^j_h$ , y sobre los lugares  $(p'_j, c')$  (siendo  $c'$  la etiqueta obtenida por aplicación de la regla de disparo) su efecto es añadir  $W(t, p)$  tokens. En definitiva, el marcaje obtenido es exactamente  $\varphi(M')$ .

Recíprocamente, supongamos que  $\varphi(M)[(x, t)]\varphi(M')$  ocurre en  $N''_\beta$ , para un cierto  $x = ((p_1, c^1_1), \dots, (p_1, c^1_{n_1}), \dots, (p_k, c^k_1), \dots, (p_k, c^k_{n_k})) \in A(t)$ . Los lugares precondition de  $(x, t)$  son precisamente los  $p_j$ , para  $j = 1, \dots, k$ , y los  $(p_j, c^j_h)$ , para  $j = 1, \dots, k$  y  $h = 1, \dots, n_j$ .

Entonces  $t$  está permitida en  $N'_\beta$  bajo el marcaje  $M$ , utilizando en particular para cada lugar  $p_j$  los tokens con anotaciones  $c^j_1, \dots, c^j_{n_j}$ . Basta entonces aplicar

el sentido directo para concluir que el marcaje obtenido con el disparo de  $t$  en  $N'_\beta$  es  $M'$ , pues  $\varphi$  es inyectiva.  $\square$

**Teorema 7.3** Sea  $N = (P, T, F, W, \delta)$  una Red de Petri Temporizada con duraciones reales,  $\beta$  un instante real dado y  $M_0$  un marcaje inicial de  $N$ . Sea entonces  $N'_\beta = (P, T, F, W, M_0)$  la red de Petri coloreada asociada según la definición 7.8.

Entonces un marcaje estable  $M = (M^1, \emptyset)$  es alcanzable en  $N$  en el instante  $\beta$  si y sólo si  $M^1$  es alcanzable en  $N'_\beta$  haciendo abstracción de las etiquetas que portan los tokens de dicha red.

**Demostración:**

$\Rightarrow$ : Supongamos que existe una secuencia de pasos en  $N$  tal que:

$$M_0[R_1^{(\beta_1)}]_{\beta_2} M_1 \dots M_{n-1}[R_n^{(\beta_n)}]_{\beta_{n+1}} M_n$$

siendo  $M_n = M$  y  $\beta = \beta_{n+1}$ . Empecemos analizando el disparo de  $R_1$ . En  $N'$  hay un marcaje inicial en el que todos los lugares tienen el mismo marcaje que en  $N$ , pero con una anotación  $(0, \dots, 0)$ . Esto implica que todas las transiciones de  $R_1$  pueden ser disparadas de forma independiente en  $N'$ . Estas transiciones, una vez disparadas generan un nuevo marcaje  $\tilde{M}^1$  en  $N'$ , en el que los nuevos tokens llevan anotada la transición  $t$  que los produjo. Eso significa que están disponibles en tiempo  $\delta(t)$ . En todo caso, en el instante  $\beta_2$  estarán disponibles los tokens necesarios para el disparo de las transiciones de  $R_2$ , con el que podemos razonar de forma análoga a como lo hemos hecho para  $R_1$ . Extendemos el razonamiento hasta llegar al instante  $\beta_n$ , en el que tenemos disponibles los tokens necesarios para el disparo de las transiciones de  $R_n$ . Con su disparo se generan nuevos tokens, cuyas anotaciones incluyen las citadas transiciones. Estas transiciones terminan además (así como las que estuvieran en ejecución) antes del instante  $\beta$  (en  $N$ ), pues  $M$  es estable. Por tanto, en  $N'$  los tokens están disponibles antes de dicho instante. Por tanto,  $M^1$  es alcanzable en  $N'$  y no hay tokens con un instante de disponibilidad mayor que  $\beta$ .

$\Leftarrow$ : Si  $\tilde{\sigma}$  es una secuencia de ocurrencia en  $N'$  que nos conduce a un marcaje estable  $M_1$ , entonces las transiciones de  $\tilde{\sigma}$  pueden ser disparadas en  $N$  en sus instantes de disponibilidad, lo que permite alcanzar  $M = (M^1, \emptyset)$  en tiempo  $\beta$ .  $\square$

**Corolario 7.3** Sea  $N = (P, T, F, W, \delta)$  una Red de Petri Temporizada con duraciones reales,  $\beta$  un instante real dado y  $M_0$  un marcaje inicial de  $N$ . Sea entonces  $N'_\beta = (P, T, F, W, M_0)$  la red de Petri asociada según la definición 7.8 y  $N''_\beta = (P'', T'', F'', W'', M''_0)$  la red obtenida aplicando la definición 7.9.

Entonces un marcaje estable  $M = (M_1, \emptyset)$  es alcanzable en  $N$  en el instante  $\beta$  si y sólo si existe un marcaje  $M''$  alcanzable en  $N''_\beta$  tal que  $M''|_P = M_1$ .

**Demostración:** Por el teorema anterior  $M$  es alcanzable en  $N$  en el instante  $\beta$  si y sólo si  $M_1$  es alcanzable en  $N'_\beta$ . Ahora bien,  $M_1$  es alcanzable en  $N'_\beta$  si y sólo si existe un marcaje  $M''$  alcanzable en  $N''_\beta$  tal que  $M''|_P = M_1$ , lo que puede obtenerse fácilmente a partir del teorema 7.2.  $\square$

Parece por tanto que el problema de alcance estricto para redes temporizadas con tiempos reales ha quedado reducido al problema de alcance sobre redes no temporizadas con su semántica ordinaria, que como sabemos es decidible. Sin embargo, dicha reducción exige que seamos efectivamente capaces de construir la red coloreada  $N'_\beta$ , lo que exige en principio la capacidad de decidir la relación  $\leq$  entre las etiquetas posibles, así como la de definir *efectivamente* dicho conjunto de etiquetas posibles. En abstracto podríamos decir que tenemos un resultado de decidibilidad *módulo* la decidibilidad de dichas cuestiones. Ahora bien, como consideramos que este no es el momento ni lugar para profundizar en cuestiones relativas a la computabilidad con números reales, hemos considerado oportuno presentar aquí un caso particular concreto de dicho resultado, que es el que corresponde a aquellos instantes de tiempo  $\beta$  tales que no sean combinación lineal con coeficientes enteros no negativos de las duraciones de las transiciones.

**Corolario 7.4** Sea  $N = (P, T, F, W, \delta, M_0)$  una Red de Petri Temporizada Marcada con duraciones reales,  $\beta \in R$  que no sea combinación lineal con coeficientes enteros no negativos de las duraciones de las transiciones de  $N$ . Entonces es decidible si un marcaje  $M$  cualquiera es alcanzable en  $N$  en tiempo  $\beta$ .

**Demostración:** En principio, al no ser  $\beta$  combinación lineal con coeficientes naturales de las duraciones de las transiciones, podemos decidir si una transición es disparable, dada una configuración cualquiera de tokens sobre sus precondiciones. Ello se debe a que en este caso son decidibles las comparaciones de la

forma  $\sum n_i \cdot \delta(t_i) \leq \beta$ , pues al ser distintos los dos miembros de la relación será posible determinar en tiempo finito cuál de ellos es mayor.

Sin embargo, todavía existe otro punto que tenemos que ser capaces de decidir, que es la obtención de la etiqueta de los tokens producidos por el disparo de una transición. Ello requiere que seamos capaces de obtener el token precondition de  $t$  (entre los utilizados para su disparo) cuyo instante de disponibilidad sea máximo. Si todos estos instantes de disponibilidad son distintos, entonces podremos determinar en tiempo finito el máximo; sin embargo ¿Qué pasa cuando tenemos dos tokens maximales con el mismo instante de disponibilidad? En este caso no podremos decidir cuál de ellos es mayor, pues de hecho ninguno lo es, pero tampoco sería posible en general concluir en tiempo finito que cualquiera nos sirve, por ser ambos iguales. Ahora bien, afortunadamente es siempre posible encontrar un  $\epsilon$  suficientemente pequeño, tal que si los instantes de disponibilidad de los tokens en litigio no difieren en más de  $\epsilon$  unidades de tiempo, entonces cualquiera de ellos puede ser utilizado como si fuese el maximal (no afectando la elección a la validez de la construcción para decidir la alcanzabilidad en tiempo  $\beta$ ). La determinación de dicho valor  $\epsilon$  es compleja, y se basaría en aprovechar las diferencias positivas entre toda combinación lineal con coeficientes naturales de las duraciones de las transiciones y  $\beta$ . No obstante, confiamos que con esta información el lector quede convencido de la existencia de dicho  $\epsilon$ , que en el fondo es lo que importa.

Consideremos entonces un marcaje  $M$  de  $N$ . Si  $M$  es estable podemos aplicar el teorema 7.3, y dado que el problema de alcance de submarcajes es decidible en redes no temporizadas con su semántica ordinaria, concluimos la decidibilidad del alcance estricto en redes temporizadas con duraciones reales. Si  $M$  no es estable, entonces es posible volver hacia atrás el marcaje  $M$  hasta un marcaje estable anterior. Dado que podemos decidir la alcanzabilidad de este marcaje estable, podremos decidir la alcanzabilidad del marcaje no estable de partida.  $\square$

Seguidamente definimos una codificación que nos permite demostrar también la decidibilidad de la  $\beta$ -vivacidad. Dicha codificación está inspirada en la utilizada anteriormente para resolver el alcance estricto; sin embargo, puesto que los marcajes de partida que ahora hemos de considerar son todos los marcajes alcanzables, no podemos anotar información sobre los tokens desde el marcaje inicial, pues esto nos conduciría a trabajar con un número infinito de colores. Por tanto, la

codificación en este caso funciona en tres fases, que describimos a continuación informalmente.

En una primera fase permitiremos a la red construida evolucionar libremente bajo la regla clásica de disparo, manteniendo la anotación  $(0, \dots, 0)$  sobre todos los tokens. Entonces, todo marcaje estable alcanzable en la red de partida podrá ser alcanzado también en la codificación en esta primera fase. El paso de la primera fase a la segunda fase puede ocurrir en cualquier momento, y éste se señala mediante la ocurrencia de una nueva transición  $fin_1$ , añadida a la red construida.

En la segunda fase ya empezamos a anotar información sobre los tokens, aunque sólo se permite el disparo de transiciones que utilicen tokens con anotación  $(0, \dots, 0)$ . Entonces, los tokens generados por las transiciones disparadas en esta segunda fase no pueden ser utilizados en nuevos disparos en esta fase. Simulamos así la ejecución de un paso en la red original. La finalización de la segunda fase ocurrirá cuando se dispare una nueva transición  $fin_2$ .

Finalmente, en la tercera fase ya se permite el disparo de transiciones de acuerdo con la semántica introducida en la definición 7.8, lo que incluye en particular la utilización de todos los tokens producidos por las transiciones disparadas en las fases anteriores.

**Definición 7.11** Sea  $N = (P, T, F, W, \delta, M_0)$  una Red de Petri Temporizada Marcada con duraciones reales y  $\beta$  un instante real dado. Asociamos al par  $(N, \beta)$  una Red de Petri Coloreada  $N'_\beta$  basada en la propia red  $N$ , pero sin tiempos,  $N'_\beta = (P', T', F', W', M'_0)$ . De nuevo, los tokens de  $N'_\beta$  estarán etiquetados por tuplas  $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{N}^n$ , donde  $n = |T|$  y  $\sum c_i \cdot \delta(t_i) \leq \beta$ .

La red  $N'_\beta$  se define como sigue:

$$\begin{aligned} P' &= P \cup \{p_1, p_2, p_3\} \\ T' &= T \cup \{fin_1, fin_2\} \\ F' &= F \cup \{(p_1, fin_1), (fin_1, p_2), (p_2, fin_2), (fin_2, p_3)\} \\ W'(f) &= \begin{cases} W(f) & \text{si } f \in F \\ 1 & \text{si } f \notin F \end{cases} \\ M'_0(p) &= \begin{cases} M_0(p) & \text{si } p \in P \\ 1 & \text{si } p = p_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Por supuesto, los tokens del marcaje inicial tienen como anotación  $(0, \dots, 0)$ .

La regla de disparo de la nueva red  $N'_\beta$  se define como sigue:

El disparo de la transición  $fin_i$ , para  $i = 1, 2$  está permitido cuando el lugar  $p_i$  esté marcado por un token. El disparo de dicha transición produce un token sobre el lugar  $p_{i+1}$ , el cual va anotado con  $(0, \dots, 0)$ .

Sea entonces  $t \in T$  con  $\bullet t = \{p_1, \dots, p_k\}$  y  $t^\bullet = \{p'_1, \dots, p'_l\}$ ; y sean  $W(p_j, t) = n_j$ , para  $j = 1, \dots, k$  y  $W(t, p'_h) = m_h$ , para  $h = 1, \dots, l$ . La transición  $t$  está permitida bajo un marcaje  $M$  de  $N'_\beta$  si y sólo si está permitida en el sentido clásico (hay suficientes tokens para dispararla en sus lugares precondition) y además se cumple una de las siguientes condiciones:

- $M(p_1) = 1$ .
- $M(p_2) = 1$ , y  $\forall j \in \{1, \dots, k\}$  existen al menos  $n_j$  tokens en el lugar  $p_j$  anotados con  $(0, \dots, 0)$ .
- $M(p_3) = 1$  y el disparo de  $t$  es admisible (para un cierto conjunto de tokens sobre sus lugares precondition) en el sentido de la definición 7.8.

El efecto del disparo de  $t$  dependerá de la fase en que nos encontremos, y de las etiquetas de los tokens utilizados para su disparo (de nuevo representamos por  $C$  las etiquetas de dichos tokens):

- Si  $M(p_1) = 1$ , entonces se sustraen de cada lugar  $p_j$  los  $n_j$  tokens considerados, y se generan nuevos tokens sobre los lugares postcondición (según la regla clásica de disparo), todos ellos anotados con  $(0, \dots, 0)$ .
- Si  $M(p_2) = 1$  y  $\delta(t) > \beta$ , entonces únicamente se sustraen de cada lugar  $p_j$  los  $n_j$  tokens considerados, no creándose nuevos tokens sobre los lugares postcondición.
- Si  $M(p_1) = 0$  y  $\delta(t) \leq \beta$ , entonces se sustraen de cada lugar  $p_j$  los  $n_j$  tokens considerados, y se añaden nuevos tokens sobre los lugares postcondición (según la regla clásica de disparo), todos ellos anotados por  $c' = c_j^i + \chi(t)$ , siendo  $c'$  la etiqueta del token de  $C$  en la que se alcanza el máximo instante de disponibilidad.

La notación para representar la evolución de  $N'_\beta$  es la usual,  $M[t]_d M'$ . □

De nuevo, es posible codificar estas redes coloreadas mediante Redes de Petri No Temporizadas con su semántica ordinaria.

**Definición 7.12** Sea  $N = (P, T, F, W, \delta)$  una Red de Petri Temporizada con duraciones reales,  $\beta$  un instante real dado,  $M_0$  un marcaje inicial de  $N$  y  $N'_\beta = (P, T, F, W, M_0)$  la red coloreada asociada según la definición 7.11. Definimos la red de Petri  $N''_\beta = (P'', T'', F'', W'', M''_0)$  con la semántica ordinaria de secuencias de ocurrencia de la forma siguiente:

$$P'' = P \cup P_1 \cup \bigcup_{c \in C} P_c, \text{ siendo } P_c = \{(p, c) \mid p \in P\}, P_1 = \{f_1, f_2, f_3\}$$

$$T'' = T_1 \cup \{(x, t, i) \mid t \in T, 1 \leq i \leq 2, x \in B(t)\} \cup \{(x, t, 3) \mid t \in T, x \in A(t)\},$$

siendo  $A(t)$  definido como en la def. 7.9,  $T_1 = \{r_1, r_2\}$ , y  $B(t) =$   
 $\{((p_1, c_1^1), \dots, (p_1, c_{n_1}^1), \dots, (p_k, c_1^k), \dots, (p_k, c_{n_k}^k) \mid c_i^h = \bar{0}, 1 \leq h \leq k,$   
 $1 \leq i \leq n_h\}$ , siendo  $\bar{0} = (0, \dots, 0)$ ,  $\star t = \{p_1, \dots, p_k\}$ ,  $n_j = W(p_j, t)$ ,  
para  $j \in \{1, \dots, k\}$

$$F'' = \{(f_i, r_i), (r_i, f_{i+1}) \mid i = 1, 2\} \cup \{(f_i, (x, t, i)), ((x, t, i), f_i) \mid i = 1, 2, 3,$$

$$(x, t, i) \in T''\} \cup \{(p, (x, t, i)) \mid (p, t) \in F, (x, t, i) \in T''\} \cup$$

$$\{((x, t, i), p) \mid (t, p) \in F, (x, t, i) \in T''\} \cup \{((p, \bar{0}), (x, t, i)) \mid 1 \leq i \leq 2,$$

$$t \in T, (p, \bar{0}) \in P_{\bar{0}}, (x, t, i) \in T'', \exists h \text{ tal que } (p, \bar{0}) = x_h\} \cup$$

$$\{((x, t, 1), (p, \bar{0})) \mid (p, \bar{0}) \in P_{\bar{0}}, (x, t, 1) \in T'', p \in t^\star\} \cup$$

$$\{((x, t, 2), (p, c)) \mid (p, c) \in P_c, (x, t, 2) \in T'', \delta(t) \leq \beta, p \in t^\star, \text{ y } c \text{ es la}$$

etiqueta obtenida tras el disparo de  $t$  bajo la configuración de tokens  $x\}$

$$\cup \{((p, c), (x, t, 3)) \mid (p, c) \in P_c, (x, t, 3) \in T'', \exists h \text{ tal que } (p, c) = x_h\} \cup$$

$$\{((x, t, 3), (p, c)) \mid (p, c) \in P_c, (x, t, 3) \in T'', p \in t^\star, \text{ y } c \text{ es la etiqueta}$$

obtenida tras el disparo de  $t$  bajo la configuración de tokens  $x\}$

$$W''(f) = \begin{cases} |\{h \mid c_h^j = c_{h_0}^j, ((p_j, c_h^j), (x, t, i)) \in F''\}| & \text{si } f = ((p_j, c_{h_0}^j), (x, t, i)), \\ & \text{con } h_0 \in \{1, \dots, n_j\} \text{ y } j \in \{1, \dots, k\} \\ W(t, p) & \text{si } f = ((x, t, i), (p, c)) \vee f = ((x, t, i), p) \\ W(p, t) & \text{si } f = (p, (x, t, i)) \end{cases}$$

$$M''_0(p') = \begin{cases} M_0(p) & \text{si } p' = p \in P \vee p' = (p, (0, \dots, 0)) \\ 1 & \text{si } p' = f_1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$



Es relativamente sencillo, aunque sí un tanto aparatoso y aburrido, probar que  $N''_\beta$  codifica efectivamente a la red  $N'_\beta$  (la demostración sigue argumentos similares a los utilizados en la prueba del teorema 7.2).

**Definición 7.13** Sea  $N = (P, T, F, W, \delta, M_0)$  una Red de Petri Temporizada Marcada con duraciones reales,  $\beta$  un instante real dado y  $N'_\beta = (P', T', F', W', M'_0)$  la red coloreada asociada a  $N$  según la definición 7.11.

1. Definimos el siguiente conjunto de marcajes de  $N'_\beta$

$$CM = \{M \mid \exists M' \in [M'_0]_d, \exists \sigma = fin_1 \dots fin_n, M'[\sigma]_d M\}$$

Nótese que por la forma de  $\sigma$  el marcaje  $M'$  debe cumplir en particular que  $M'(p_1) = 1$ . Los marcajes de  $CM$  son los marcajes de  $N'_\beta$  que son alcanzables al finalizar la fase 2.

2. Definimos la función  $\varphi : CM \longrightarrow \mathcal{M}$ , siendo  $\mathcal{M}$  el conjunto de marcajes de  $N$ , de la forma siguiente:  $\varphi(M) = (\bar{M}_1, \bar{M}_2)$  siendo

- $\bar{M}_1(p) = M(p) - |\{n(p, c) \mid c \in C - \{(0, \dots, 0)\}\}|$
- $\forall t \in T, t^* \neq \emptyset, \quad \bar{M}_2(t, \delta(t)) = n(t, \chi(p))/W(t, p)$ , siendo  $p \in t^*$ .  
Obsérvese que esta definición no depende del lugar  $p \in t^*$  elegido, pues  $M \in CM$ .
- $\forall t \in T, \forall \alpha < \delta(t) \quad \bar{M}_2(t, \alpha) = 0$

Esta función asocia a cada marcaje de  $CM$  un marcaje de  $N$ , que corresponde al marcaje que se obtendría en  $N$  disparando todas juntas las transiciones (cuyo conjunto de lugares postcondición sea no vacío) que están en ejecución en  $M$ . Entonces  $\varphi(M)$  es el marcaje obtenido tras ese disparo, pero en el mismo instante del disparo. En esta definición la información de qué transiciones están en ejecución se obtiene en base a las etiquetas asociadas a los tokens de los lugares postcondición. En concreto, una transición  $t$  habrá sido disparada si tenemos al menos  $W(t, p)$  tokens con anotación  $\chi(t)$  sobre cada lugar  $p \in t^*$ . Evidentemente, esta información sólo puede obtenerse para aquellas transiciones cuyo conjunto de lugares postcondición sea no vacío. Sin embargo, tal definición es perfectamente lícita, pues las transiciones en

ejecución en  $M$  que no tengan postcondiciones pueden verse como si hubieran ocurrido en el último momento de la fase 1. Queda así correctamente simulado su efecto, pues desaparecerían en efecto los tokens correspondientes a sus precondiciones, con lo que no podrían ser utilizados para disparar las transiciones de la fase 2 que sí tienen postcondiciones; mientras que el tratamiento (vacío) que reciben sus lugares postcondiciones es el adecuado, pues los mismos no existen.

3. Sea  $\bar{M} \in \mathcal{M}$ . Consideramos el multiconjunto de transiciones  $R$  en ejecución en  $\bar{M}$ , y el marcaje  $M$  de  $N'_\beta$  inducido por  $\bar{M}$  definido por

$$M(p') = \begin{cases} \bar{M}_1(p) + \sum_{t \in R} R(t) \cdot W(p, t) & \forall p \in P \text{ si } p' = p \in P \\ 1 & \text{si } p' = p_2 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

estando todos sus tokens etiquetados por  $(0, \dots, 0)$ .

Definimos entonces la función  $\phi : \mathcal{M} \longrightarrow CM$ , de la forma siguiente:  $\phi(\bar{M}) = M'$ , siendo  $M[\sigma \text{ fin}_2]_d M'$ , donde  $\sigma \in \text{sec}(R)$  (ver definición 5.26).

Obsérvese que esta definición no depende del  $\sigma$  elegido en  $\text{sec}(R)$ , pues las transiciones disparadas en  $\sigma$  no usan tokens producidos por transiciones de la propia  $\sigma$ .

Esta función asocia a cada marcaje de  $N$  un marcaje de  $N'_\beta$ , obtenido disparando secuencialmente las transiciones que se encuentran en ejecución en  $\bar{M}$  partiendo del marcaje estable obtenido a partir de  $M$  anulando la ejecución de las transiciones en  $R$ .

□

**Teorema 7.4** Sea  $N = (P, T, F, W, \delta, M_0)$  una Red de Petri Temporizada Marcada con duraciones reales,  $t \in T$ ,  $\beta$  un instante real dado y  $N'_\beta = (P', T', F', W', M'_0)$  la red coloreada asociada a  $N$  según la definición 7.11.

Entonces  $t$  es  $\beta$ -viva en  $N$  si y sólo si para todo marcaje  $M'$  de  $N'_\beta$  perteneciente al conjunto  $CM$  definido según la Def. 7.13 existe un marcaje alcanzable desde  $M'$ ,  $M''$ , que permite el disparo de  $t$ .

**Demostración:**

$\Rightarrow$ : Supongamos que  $t$  sea  $\beta$ -viva y sea  $M' \in CM$ . Entonces, el marcaje  $\varphi(M')$  es alcanzable en  $N$  en un cierto instante. Es más, este marcaje puede obtenerse por el disparo del paso constituido por las transiciones (de  $T$ ) de la secuencia  $\sigma$  proporcionada por la definición de  $CM$  en ese mismo instante.

Como  $t$  es por hipótesis  $\beta$ -viva, existirá un marcaje alcanzable en  $\beta$  pasos desde  $\varphi(M')$  (en  $N$ ) que permite el disparo de  $t$ . La secuencia de pasos que nos conduce a dicho marcaje en  $N$  puede ser ejecutada también (secuencializando los pasos) en  $N'_\beta$  desde el marcaje  $M'$ , lo que nos conduce a un marcaje  $M''$  en  $N'_\beta$  que permite el disparo de  $t$ , tal como pretendíamos demostrar.

$\Leftarrow$ : Sea ahora  $\bar{M}$  un marcaje de  $N$ . Consideremos entonces el marcaje  $M' = \phi(\bar{M}) \in CM$ . Por hipótesis, existe  $\sigma$  tal que  $M'[\sigma]_d M''$ , con  $M''[t]_d$ . Ahora bien, las transiciones de  $\sigma$  pueden también ejecutarse en  $N$  desde el marcaje  $\bar{M}$  (teniendo en cuenta los instantes de disponibilidad de los tokens que utilizan), pues los tokens producidos por las transiciones en ejecución en  $\bar{M}$  están disponibles antes o a la vez que en  $M'$  (en  $N'_\beta$ ). Es decir, podremos encontrar un marcaje alcanzable en  $\beta$  pasos desde  $\bar{M}$  que permite el disparo de  $t$ .  $\square$

**Teorema 7.5** Sea  $N = (P, T, F, W, \delta, M_0)$  una Red de Petri Temporizada Marcada con duraciones reales,  $t \in T$ ,  $\beta$  un instante real dado que no sea combinación lineal con coeficientes enteros no negativos de las duraciones de las transiciones de  $N$  y  $N'_\beta = (P', T', F', W', M'_0)$  la red coloreada asociada a  $N$  según la definición 7.11.

Es decidible si  $\forall M' \in CM$  existe un marcaje alcanzable desde  $M'$  (en  $N'_\beta$ ) que permite el disparo de  $t$ .

**Demostración:** Sea  $N''_\beta$  la Red de Petri No Temporizada asociada a  $N'_\beta$  (ver definición 7.12). Entonces consideremos la red  $N'''_\beta$  obtenida a partir de  $N''_\beta$ , eliminando la transición  $fin_2$  y el lugar  $p_3$ . Los marcajes alcanzables de la red así obtenida son entonces los marcajes alcanzables en  $N'_\beta$  en la fase 2.

Consideremos entonces el conjunto de marcajes  $\{M_B^1, \dots, M_B^b\}$  obtenido para dicha red por aplicación del teorema 2.3. Recordemos que este conjunto de marcajes verifica que para cualquier marcaje alcanzable  $M'$  en  $N'''_\beta$  existe algún  $i \in \{1, \dots, b\}$  tal que  $M'$  cubre a  $M_B^i$ .

Entonces  $\forall M' \in CM$  existe un marcaje alcanzable desde  $M'$  (en  $N'_\beta$ ) que permite el disparo de  $t$  si y sólo si para todo  $i \in \{1, \dots, b\}$  existe un marcaje alcanzable a partir de  $M_B^i$  en  $N''_\beta$  que permite el disparo de  $t$ .

La implicación directa de tal afirmación es inmediata. Veamos la prueba del recíproco:

Suponemos que para todo  $i \in \{1, \dots, b\}$  existe un marcaje alcanzable que permite el disparo de  $t$ . Sea entonces  $M' \in CM$ . Por definición de  $CM$  existirán  $M$  y  $\sigma = fin_1 \dots fin_2$  tales que  $M[\sigma]_d M'$ . Sea entonces  $\sigma'$  la secuencia obtenida a partir de  $\sigma$  cancelando el disparo de  $fin_2$ , y sea  $M''$  dado por  $M[\sigma']_d M''$ . El marcaje  $M''$  básicamente coincide con  $M'$  (sólo difiere en el marcaje de los lugares  $p_1$  y  $p_2$ ), pero con la diferencia de que es alcanzable en la fase 2. Por tanto puede ser alcanzado en la red  $N''_\beta$ . Existe entonces un  $i \in \{1, \dots, b\}$  tal que  $M'' \geq M_B^i$ . Por hipótesis, desde el marcaje  $M_B^i$  podemos alcanzar (en  $N''_\beta$ ) un marcaje que permite el disparo de  $t$ . Por tanto, la secuencia de ocurrencia que nos permite alcanzar dicho marcaje puede también ser disparada desde  $M''$ , pues  $M''$  cubre a  $M_B^i$ , y en consecuencia, desde  $M'$  (pero ahora en  $N'_\beta$ ).

En definitiva, hemos reducido el problema a un número finito de problemas de cubrimiento de marcajes, que como sabemos es un problema decidable.  $\square$

**Corolario 7.5** Sea  $N = (P, T, F, W, \delta, M_0)$  una Red de Petri Temporizada Marcada con duraciones reales y  $\beta$  un instante real dado que no sea combinación lineal con coeficientes enteros no negativos de las duraciones de las transiciones de  $N$ .

Es decidable si  $N$  es  $\beta$ -viva.  $\square$

**Teorema 7.6** Sea  $N = (P, T, F, W, \delta, M_0)$  una Red de Petri Temporizada Marcada con duraciones reales y  $\beta$  un instante real dado que no sea combinación lineal con coeficientes enteros no negativos de las duraciones de las transiciones de  $N$ .

Es decidable la propiedad de ausencia de  $\beta$ -bloqueos.

**Demostración:** Vamos a considerar una variación sobre la codificación introducida en la definición 7.8. En concreto, permitimos también el disparo de cualquier transición  $t$  cuando  $Max(C) + \delta(t) > \beta$ , sólo que en este caso el único token generado es un token sobre un nuevo lugar *excede*. De esta forma, si dicho lugar está marcado es porque se ha disparado al menos una transición que termina más tarde del instante  $\beta$ .

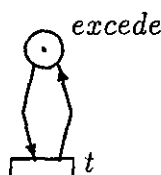


Figura 37: Conexión del lugar *excede* con las nuevas transiciones

Es de nuevo relativamente sencillo codificar esta semántica con la semántica ordinaria de redes no temporizadas.

Por definición, un marcaje muerto es estable y no permite el disparo de nuevas transiciones. De esta forma, un marcaje muerto alcanzable en tiempo  $\beta$  en  $N$  es estable, y al trasladar el problema a la codificación citada no obtenemos tokens sobre el lugar *excede*. Por tanto, la propiedad de  $\beta$ -bloqueo de la red  $N$  se reduce al problema de que la red construida ( $N'_\beta$ ) pueda bloquearse por ausencia de tokens, no por la restricción semántica introducida. Esto no se traslada evidentemente de forma directa a un problema de ausencia de bloqueos en la red no temporizada construida para simular esta semántica ordinaria especial, dado que estas redes terminan generalmente en bloqueos (salvo que haya transiciones autónomas).

Sin embargo, podemos añadir una transición  $t$  conectada con el lugar *excede* tal como se indica en la figura 37. Con esta transición  $t$  conseguimos que la red no temporizada (que nos permite simular la semántica introducida) no se bloquee en cuanto aparezca un token con un instante de disponibilidad mayor que  $\beta$ . En consecuencia, si esta red se bloquea es porque ha aparecido un bloqueo antes del instante  $\beta$ , como queríamos. De esta forma, nuestro problema de ausencia de  $\beta$ -bloqueos lo reducimos a un problema de ausencia de bloqueos sobre una Red de Petri No Temporizada, que como sabemos es decidible.  $\square$

## Capítulo 8

# Bisimulación

En este capítulo introduciremos la noción de bisimulación, que ha sido propuesta para reflejar la semántica de una Red de Petri desde el punto de vista observacional. Esto se hace de una forma indirecta, por medio de una noción de equivalencia entre Redes de Petri, que nos indica cuándo dos redes son indistinguibles respecto de dicho criterio. Como quiera que se trata de una noción de equivalencia "muy fuerte" <sup>1</sup> es de gran utilidad de cara a demostrar o que un sistema cumple las propiedades más usuales, por ser éstas preservadas por la bisimulación. Para ello bastaría obtener un sistema bisimilar con el de partida, sobre el que sea más sencillo comprobar dichas propiedades.

En concreto consideraremos en este capítulo la noción de bisimulación preservando historias introducida en [RT88] bajo el nombre de bisimulación de estructuras de conducta. En [Vog91] se estudia esta noción de bisimulación bajo la semántica de interleaving, demostrando la decidibilidad del problema de determinar si dos redes son bisimilares. Nosotros extenderemos este concepto para cubrir la semántica de pasos, que captura de forma más explícita la concurrencia real.

En el capítulo siguiente definiremos el concepto de proceso temporizado y lo relacionaremos con las secuencias de pasos temporizadas. Ello nos permitirá extender el concepto de bisimulación preservando historias a las Redes Temporizadas.

---

<sup>1</sup>En el sentido de que es una noción de equivalencia verificada por "pocos" pares de redes, por lo que preserva muchas propiedades.

## 8.1 Procesos de Redes de Petri

Presentamos primeramente el concepto de proceso y las relaciones con la semántica de interleaving para Redes de Petri No Temporizadas (ver [Bes86]).

La definición de procesos requiere considerar un tipo especial de Redes de Petri, las llamadas Redes de Ocurrencia, que se caracterizan por la ausencia de conflictos y de ciclos.

### Definición 8.1 (Redes de Ocurrencia)

Una Red de Petri Ordinaria  $(B, E, F)$  se dice que es una *Red de Ocurrencia* sii satisface las dos condiciones siguientes:

- $\forall b \in B : |\bullet b| \leq 1, |b\bullet| \leq 1$
- $\forall x, y \in B \cup E : (x, y) \in F^+ \Rightarrow (y, x) \notin F^+$   
siendo  $F^+ = \bigcup_n \{F^n \mid n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$

□

En las Redes de Ocurrencia los lugares representan condiciones y las transiciones eventos. Las Redes de Ocurrencia expresan una dependencia causal entre los eventos del sistema que se pone de manifiesto en la posibilidad de definir un orden parcial global sobre la red.

### Definición 8.2 (Orden Parcial Asociado a una Red de Ocurrencia)

Sea  $N = (B, E, F)$  una Red de Ocurrencia. Sea el conjunto  $X = B \cup E$ . Definimos el *orden parcial*  $\leq$  sobre  $X$  asociado a  $N$  de la forma siguiente:

$$\leq \doteq F^*$$

Igualmente definimos  $< \doteq F^+$ .

Es inmediato comprobar que " $\leq$ " es efectivamente un orden parcial. □

### Definición 8.3 (Cadenas y Anticadenas)

Sea  $(B, E, F)$  una Red de Ocurrencia y sea  $\leq$  el orden parcial definido anteriormente.

1. Se definen las relaciones  $li = (\leq \cup \geq)$ ,  $co = (X \times X - li) \cup id_X$ , donde  $X = B \cup E$ .

2. Se dice que  $l \subseteq X$  es una *cadena* sii  $\forall x, y \in l, (x, y) \in li$ .
3. Se dice que  $l \subseteq X$  es una *línea* sii es una cadena maximal, es decir,  $\forall z \in X - l, \exists x \in l, (x, z) \notin li$ .
4. Se dice que  $c \subseteq X$  es una *anticadena* sii  $\forall x, y \in c, (x, y) \in co$ .
5. Se dice que  $c \subseteq X$  es un *corte* sii es una anticadena maximal, es decir,  $\forall z \in X - c, \exists x \in c, (x, z) \notin co$ .
6. Un corte  $c$  se dice que es un *B-corte* sii  $c \subseteq B$ .

□

Las relaciones  $li$  y  $co$  denotan, respectivamente, la causalidad y la concurrencia. Las líneas vienen a ser los subprocesos secuenciales de  $(B, E, F)$ , mientras que los cortes reflejan los estados posibles de  $(B, E, F)$ .

**Definición 8.4** Sea  $N = (B, E, F)$  una Red de Ocurrencia,  $X = B \cup E$ , y  $(X, \leq)$  el conjunto parcialmente ordenado asociado. Se definen:

1.  $Min(N) = \{x \in X \mid \bullet x = \emptyset\}$
2.  $Max(N) = \{x \in X \mid x^\bullet = \emptyset\}$
3. Para dos anticadenas  $c_1, c_2 \subseteq X$ , se define el *intervalo entre*  $c_1$  y  $c_2$  por medio de

$$[c_1, c_2] = \{z \in X \mid \exists x \in c_1, \exists y \in c_2, x \leq z \leq y\}$$

4. Sea  $A \subseteq X$ . Se definen

$$\downarrow A = \{y \in X \mid \exists x \in A, y \leq x\}$$

$$\uparrow A = \{z \in X \mid \exists x \in A, x \leq z\}$$

□



### 8.1.1 Procesos de Redes de Petri con la Semántica de Interleaving

#### Definición 8.5 (Procesos)

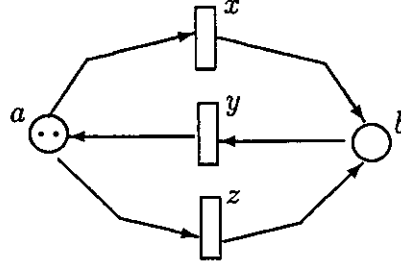
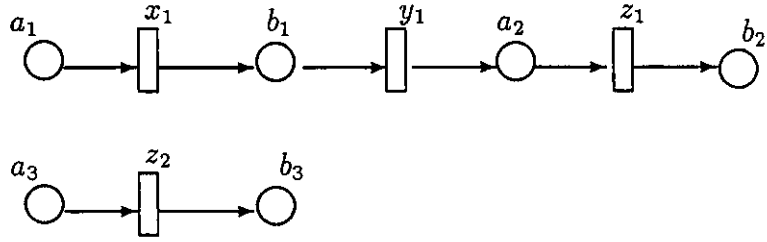
Sea  $N = (S, T, F, M_0)$  una Red de Petri Ordinaria Marcada T-restringida. Sea  $N' = (B, E, F')$  una Red de Ocurrencia, y  $p : B \cup E \longrightarrow S \cup T$  una función de etiquetado.

El par  $\pi = (N', p)$  es un *proceso* de  $N$  sii satisface los siguientes axiomas:

1.  $Min(N')$  es un  $B$ -corte de  $N'$ .
2.  $p(B) \subseteq S$ ,  $p(E) \subseteq T$ .
3.  $\forall e \in E, \forall s \in S, W(s, p(e)) = |p^{-1}(s) \cap \bullet e|$ , y  $W(p(e), s) = |p^{-1}(s) \cap e \bullet|$ ,  
siendo  $W(f) = 0$ , si  $f \notin F$ , y  $W(f) = 1$ , si  $f \in F$ .
4.  $\forall s \in S, M_0(s) = |p^{-1}(s) \cap Min(N)|$ .

□

El axioma 1 establece que sólo los lugares pueden ser elementos iniciales, y además, los lugares iniciales no guardan relación causal. El axioma 2 indica que la función de etiquetado relaciona lugares condición de  $N'$  con lugares de  $N$ , y eventos de  $N'$  con transiciones de  $N$ . Es importante precisar que la función  $p$  no es necesariamente inyectiva, lo que significa que varios lugares condición de  $N'$  pueden corresponder a un mismo lugar de  $N$ , y que varios eventos de  $N'$  pueden corresponder a una misma transición de  $N$ . La idea en este sentido consiste en que cada token sobre un lugar  $s$  de la red de partida  $N$  va asociado a un lugar condición distinto de la red de ocurrencia  $N'$ , y que cada instancia de una transición de la red de partida (que pueda ser disparada de forma simultánea varias veces) lleva asociado un evento diferente en la red de ocurrencia  $N'$ . El axioma 3 refleja esta idea, estableciendo que dados un lugar  $s$  y un evento  $e$  cualesquiera, existe un arco desde  $s$  a la transición asociada a  $e$  (resp. de la transición asociada a  $e$  a  $s$ ) en  $N$  si y sólo si hay un único lugar condición que esté en la precondition de  $e$  (resp. postcondición) que esté asociado al lugar  $s$  en la red  $N'$ . Finalmente, el axioma 4 fija que los lugares condición iniciales de  $N'$  corresponden exactamente a los tokens del marcaje inicial; es decir, para cada lugar marcado de la red  $N$  y cada token

Figura 38: Red de Petri  $N$ Figura 39: Un proceso de la red  $N$ 

sobre dicho lugar, se dispone de un lugar condición asociado a dicho lugar en la red  $N'$ .

**Ejemplo 8.1** Consideremos la Red de Petri Marcada  $N = (S, T, F, M_0)$  definida de la forma siguiente (ver figura 38):

$$S = \{a, b\}$$

$$T = \{x, y, z\}$$

$$F = \{(a, x), (x, b), (b, y), (y, a), (a, z), (z, b)\}$$

$$M_0(a) = 2, M_0(b) = 0$$

y sea  $N' = (B, E, W)$  la red de ocurrencia siguiente (ver figura 39).

$$B = \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}$$

$$E = \{x_1, y_1, z_1, z_2\}$$

$$W = \{(a_1, x_1), (x_1, b_1), (b_1, y_1), (y_1, a_2), (a_2, z_1), (z_1, b_2), (a_3, z_2), (z_2, b_3)\}$$

Entonces  $(N', p)$  es un proceso de  $N$ , tomando  $p(a_j) = a$ ,  $p(b_j) = b$ ,  $p(x_j) = x$ ,  $p(y_j) = y$  y  $p(z_j) = z$ .  $\square$

Dada una Red de Petri Ordinaria Marcada T-restringida  $N$ , podemos definir un proceso especialmente simple asociado a  $N$ , de la forma siguiente:  $\pi_0(N) = ((B_0, \emptyset, \emptyset), p_0)$ , siendo  $B_0 = \{b_j(s) \mid s \in S, 1 \leq j \leq M_0(s)\}$ , y  $p_0(b_j(s)) = s, \forall s \in S, \forall j \in \{1, \dots, M_0(s)\}$ .

NOTACION: Dado un proceso  $\pi = (N', p)$ , se suele denotar por  $\bullet\pi$  al conjunto  $Min(N')$ , y por  $\pi^\bullet$  al conjunto  $Max(N')$ .

### Definición 8.6 (Isomorfismo entre Procesos)

Sea  $N$  una Red de Petri Ordinaria Marcada T-restringida, y sean  $\pi_1, \pi_2$ , procesos de  $N$ . Se dice que  $\pi_1$  y  $\pi_2$  son isomorfos, lo que se denota por  $\pi_1 \cong \pi_2$ , si y sólo si existe una biyección  $\beta : X_1 \longrightarrow X_2$ , tal que

1.  $\forall x \in X_1, p_1(x) = p_2(\beta(x))$
2.  $\forall x_1, x_2 \in X_1, x_1 \leq_1 x_2 \Leftrightarrow \beta(x_1) \leq_2 \beta(x_2)$

□

Es de interés el poder relacionar los procesos de una Red de Petri con sus secuencias de ocurrencia. La idea es que los marcajes que van siendo obtenidos a lo largo de la ejecución de la secuencia de ocurrencia corresponden a *B-cortes* de la red de ocurrencia de un proceso compatible (en un sentido que más tarde precisaremos) con dicha secuencia. Además, el orden de disparo de las transiciones en la secuencia de ocurrencia se corresponde con el orden parcial que guardan los eventos asociados a dichas transiciones en la red de ocurrencia citada. Todo ello se precisa en la siguiente definición y en los teoremas posteriores.

### Definición 8.7 (Compatibilidad entre Procesos y Secuencias de Ocurrencia)

Sea  $N = (S, T, F, M_0)$  una Red de Petri Ordinaria Marcada T-restringida,  $\pi = (N', p)$  un proceso de  $N$ , y  $\sigma = M_0 t_1 M_1 \dots M_{n-1} t_n M_n$  una secuencia de ocurrencia de  $N$ . Sea  $I = \{1, \dots, n\}$  el conjunto de índices en  $\sigma$ . Entonces decimos que  $\sigma$  y  $\pi$  son *compatibles* sii existe una función biyectiva  $pos : E \longrightarrow I$  tal que

1.  $\forall e \in E, p(e) = t_{pos(e)}$  (la función  $pos$  da la posición de la transición asociada al evento  $e$  en la secuencia  $\sigma$ ).

2.  $\forall e, e' \in E, e < e' \Rightarrow pos(e) < pos(e')$  (la función  $pos$  respeta el orden).

□

**Teorema 8.1** Sea  $N = (S, T, F, M_0)$  una Red de Petri Ordinaria Marcada T-restringida,  $\pi = (N', p)$  un proceso de  $N$  y  $\sigma$  una secuencia de ocurrencia de  $N$  compatible con  $\pi$  mediante una biyección  $pos$ . Se definen de forma recursiva

1.  $c_0 = \bullet\pi$
2.  $c_i = (c_{i-1} - \bullet(pos^{-1}(i))) \cup (pos^{-1}(i))\bullet$

Entonces

1.  $\forall i \in I \cup \{0\}$ ,  $c_i$  es un  $B$ -corte de  $N'$ .
2.  $\forall i \in I \cup \{0\}, \forall s \in S, M_i(s) = |p^{-1}(s) \cap c_i|$
3.  $\forall i \in I \cup \{0\}, [\bullet\pi, c_i] \cap E = \{pos^{-1}(j) \mid j \leq i, j \in I\}$
4.  $B = \bigcup_{i \in I \cup \{0\}} c_i$

**Demostración:** Ver [Bes86].

□

**Definición 8.8** Sea  $N = (S, T, F, M_0)$  una Red de Petri Ordinaria Marcada T-restringida.

1. Dada una secuencia de ocurrencia  $\sigma$  de  $N$  definimos

$$\Pi(\sigma) = \{\pi \mid \pi \text{ es proceso de } N \text{ compatible con } \sigma\}$$

2. Dado un proceso  $\pi$  de  $N$ , definimos

$$Lin(\pi) = \{\sigma \mid \sigma \text{ es secuencia de ocurrencia compatible con } \pi\}$$

□

**Teorema 8.2** Sea  $N = (S, T, F, M_0)$  una Red de Petri Ordinaria Marcada T-restringida, y sea  $\sigma = M_0 t_1 M_1 \dots M_{n-1} t_n M_n$  una secuencia de ocurrencia de  $N$ . Entonces existe al menos un proceso  $\pi$  que es compatible con  $\sigma$ . De hecho, todos los procesos compatibles con  $\sigma$  pueden construirse en la forma indicada en la siguiente demostración, que en este caso, por su interés, incluimos parcialmente.

**Demostración:** Cada uno de dichos procesos se construyen de forma inductiva sobre el número de transiciones en  $\sigma$ , comenzando con el proceso  $\pi_0(N)$ .

Supongamos entonces definido uno de ellos,  $\pi_i = (N_i, p_i)$ , y veamos cómo extenderlo de cara a obtener un proceso  $\pi_{i+1}$ . Para ello, para cada  $s \in {}^*t_{i+1}$  se elige una condición  $b(s)$  no elegida anteriormente, con  $b(s) \in \pi_i^* \cap p_i^{-1}(s)$ , y se añade un nuevo evento  $e$ , con  $(b(s), e) \in F_{i+1}$ ,  $p_{i+1}(e) = t_{i+1}$ . Además, para cada  $s \in t_{i+1}^*$  se añade una nueva condición  $b'(s)$ , con  $p_{i+1}(b'(s)) = s$ , y  $(e, b'(s)) \in F_{i+1}$ .

Para cualesquiera  $x, y \in B_i \cup E_i$  se hace:  $p_{i+1}(x) = p_i(x)$ , y  $(x, y) \in F_{i+1} \Leftrightarrow (x, y) \in F_i$ .

Esta extensión del proceso  $\pi_i$  al  $\pi_{i+1}$  se denota como sigue:

$$\pi_i \xrightarrow{t_{i+1}} \pi_{i+1}$$

Este razonamiento inductivo finaliza cuando  $i = n$ . Las demostraciones de que los  $\pi_i$  están bien definidos, de que son efectivamente procesos y de que todos los procesos compatibles con  $\sigma$  pueden ser contruidos de esta forma no son excesivamente difíciles, aunque sí muy aparatosas, por lo que se omiten. Pueden encontrarse con detalle en [Bes86].  $\square$

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es la ausencia de unicidad en la relación de compatibilidad establecida entre secuencias de ocurrencia y procesos. De la demostración se concluye que cada forma de extender un proceso  $\pi_i$  al siguiente  $\pi_{i+1}$ , pasa por seleccionar un lugar  $b(s)$  de entre los varios posibles que cumplan una cierta condición (la idea intuitiva que hay detrás es que la definición que hemos introducido de procesos es capaz de distinguir tokens), lo que al final genera varios posibles procesos compatibles con una misma secuencia de ocurrencia. Si pretendemos que se dé necesariamente dicha unicidad, hemos de restringirnos a una clase adecuada de redes, para las cuales no exista tal posibilidad de elección. Tal es el caso de las redes 1-seguras, en las que al disponer de a lo más un token

en cada lugar, no podemos “seleccionar” un token particular a la hora de disparar una transición. Por tanto, tenemos el siguiente

**Corolario 8.1** Sea  $N$  una Red de Petri Ordinaria Marcada 1-segura y sea  $\sigma$  una secuencia de ocurrencia de  $N$ . Entonces  $|\pi(\sigma)| = 1$ .  $\square$

El siguiente teorema nos proporciona el recíproco del anterior.

**Teorema 8.3** Sea  $N$  una Red de Petri Ordinaria Marcada T-restringida, y sea  $\pi = (N', p)$  un proceso de  $N$ . Entonces:

1. Existen enumeraciones (una al menos, pero en general varias)  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$  tales que  $e_j < e_i \Rightarrow j < i$ .
2. A partir de cada numeración  $E$  de las anteriores, puede construirse (siguiendo el procedimiento que exponemos en la demostración) una secuencia de ocurrencia diferente  $\sigma_E$  compatible con  $\pi$ .
3. Todas las secuencias de ocurrencia compatibles con  $\pi$  pueden construirse de esta forma.

**Demostración:** La obtención de todas las susodichas enumeraciones es inmediata, teniendo en cuenta que  $\leq$  es un orden parcial, siguiendo el procedimiento usual de obtención de las ordenaciones topológicas inducidas. Sea entonces  $E$  una ordenación en los términos indicados. Se define la secuencia  $\sigma$ , como sigue:  $t_i = p(e_i)$ , y  $pos(e_i) = i$ , para  $1 \leq i \leq n$ . Como  $E$  es una enumeración se concluye que  $pos$  es una biyección, y que satisface las condiciones de la definición 8.7. Además, se definen  $c_0 = \bullet\pi$ ,  $c_i = (c_{i-1} - \bullet e_i) \cup e_i^*$ . No es difícil, aunque sí aparatoso, demostrar que:

1. Los  $c_i$  son  $B$ -cortes.
2.  $[\bullet\pi, c_i] \cap E = \{e_1, \dots, e_n\}$ , y que  $\bullet e_i \subseteq c_{i-1}$ , para  $0 \leq i \leq n$ .
3.  $\sigma = M_0 t_1 M_1 \dots M_n$  es una secuencia de ocurrencia de  $N$ , siendo  $M_i(s) = |p^{-1}(s) \cap c_i|$ , para  $1 \leq i \leq n$ .

Los detalles de estas demostraciones pueden encontrarse en [Bes86], así como la prueba de que todas las secuencias de ocurrencia compatibles con  $\pi$  pueden construirse en dicha forma.  $\square$

**Definición 8.9** Sea  $N = (S, T, F, M_0)$  una Red de Petri Ordinaria Marcada T-restringida, sea  $\pi = (N', p)$  un proceso de  $N$ , y sea  $c$  un  $B$ -corte de  $N$ . Definimos

1.  $\downarrow(c, \pi)$  como la restricción de  $\pi$  a los nodos  $\downarrow c$ .
2.  $\uparrow(c, \pi)$  como la restricción de  $\pi$  a los nodos  $\uparrow c$ .

$\square$

**Teorema 8.4** Sea  $N = (S, T, F, M_0)$  una Red de Petri Ordinaria Marcada T-restringida,  $\pi = (N', p)$  un proceso de  $N$  y  $c$  un  $B$ -corte de  $N$ . Entonces:

1.  $\downarrow(c, \pi)$  es un proceso de  $N$ .
2.  $\forall s \in S, M(s) = |p^{-1}(s) \cap c|$  es un marcaje alcanzable de  $N$ .
3.  $\uparrow(c, \pi)$  es un proceso de la red marcada  $\hat{N} = (S, T, F, M)$ .
4. Si  $\sigma_1 = M_0 t_1 M_1 \dots M_n$  es una secuencia de ocurrencia de  $N$  compatible con  $\downarrow(c, \pi)$  y  $\sigma_2 = M t'_1 M'_1 \dots M'_m$  es una secuencia de ocurrencia de  $\hat{N}$  compatible con  $\uparrow(c, \pi)$ , entonces  $M = M_n$ , y  $\sigma_1 \sigma_2 = M_0 t_1 M_1 \dots M_n t'_1 M'_1 \dots M'_m$  es una secuencia de ocurrencia de  $N$  compatible con  $\pi$ .

**Demostración:**

1. Es una comprobación rutinaria de los axiomas que definen un proceso.
2. Se realiza un razonamiento inductivo sobre  $n = |E \cap [\bullet\pi, c]|$ .

Para  $n = 0$ :  $c = \bullet\pi$ , y entonces basta aplicar el axioma 4 de la definición de proceso.

Para  $n > 0$ : Sea  $e$  un evento extremo de  $\downarrow(c, \pi)$ , es decir, un evento tal que no existe  $e' \in E \cap [\bullet\pi, c]$ , con  $e < e'$ . Entonces, puede demostrarse que  $e^\bullet \subseteq c$ ,  $e^\bullet \cap c = \emptyset$ , y que  $c' = (c - e^\bullet) \cup \bullet e$  es un  $B$ -corte tal que  $\downarrow(c', \pi)$  tiene  $n - 1$

eventos. Puede entonces aplicarse la hipótesis de inducción, obteniéndose que el marcaje dado por

$$\tilde{M}(s) = |p^{-1}(s) \cap c'|$$

es alcanzable en  $N$ . Basta entonces aplicar el axioma 3 de la definición de proceso para concluir que el marcaje  $M$  es alcanzable.

3. Es de nuevo una comprobación rutinaria, en la que se aplica el apartado 2 de este mismo teorema.
4. Basta considerar la igualdad  $M_n(s) = |p^{-1}(s) \cap c|$ , que puede demostrarse por inducción. La compatibilidad de  $\sigma_1\sigma_2$  puede probarse por medio de la función

$$pos(e) = \begin{cases} pos_1(e) & \text{si } e \in E \cap [Min(N), c] \\ n + pos_2(e) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

□

También es cierto el recíproco de este teorema.

**Teorema 8.5** Sea  $N = (S, T, F, M_0)$  una Red de Petri Ordinaria Marcada T-restringida,  $\pi = (N', p)$  un proceso de  $N$  y  $\sigma = M_0 t_1 M_1 \dots M_r$  una secuencia de ocurrencia de  $N$  compatible con  $\pi$ . Entonces, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \leq r$ , existe un corte  $c_n$  tal que  $\sigma_1 = M_0 t_1 M_1 \dots M_n$  es una secuencia de ocurrencia de  $N$  compatible con  $\downarrow(c_n, \pi)$ , y  $\sigma_2 = M_n t_{n+1} \dots M_r$  es una secuencia de ocurrencia de  $(S, T, F, M_n)$  compatible con  $\uparrow(c_n, \pi)$ .

**Demostración:** Basta considerar los  $c_i$  del teorema 8.1. □

Las anticadenas que están formadas únicamente por lugares condición son subconjuntos de  $B$ -cortes, lo queda reflejado en el siguiente teorema.

**Teorema 8.6** Sea  $N = (S, T, F, M_0)$  una Red de Petri Ordinaria Marcada T-restringida,  $\pi = (N', p)$  un proceso de  $N$  y  $c_0$  una anticadena tal que  $c_0 \subseteq B$ . Entonces existe un  $B$ -corte  $c$  tal que  $c_0 \subseteq c$ .

**Demostración:** Ver [Bes86]. □



El teorema siguiente expresa la relación existente entre la activación concurrente de transiciones y la relación  $co$ .

**Teorema 8.7** Sea  $N = (S, T, F, M_0)$  una Red de Petri Ordinaria Marcada T-restringida y  $\pi = (N', p)$  un proceso de  $N$ .

1. Si  $(e_1, e_2) \in co$ , para  $e_1, e_2 \in E$ , entonces hay un marcaje alcanzable  $M$  de  $N$  tal que  $p(e_1)$  y  $p(e_2)$  son activables concurrentemente.
2. Si existe un marcaje alcanzable  $M$  de  $N$  tal que dos transiciones  $t_1, t_2$  (no necesariamente distintas) son activables concurrentemente, entonces hay dos eventos distintos  $e_1, e_2$  tales que  $(e_1, e_2) \in co$ ,  $p(e_1) = t_1$  y  $p(e_2) = t_2$ .

**Demostración:**

1. Sea  $c_0 = \bullet e_1 \cup \bullet e_2$ . Consideraremos el conjunto  $A = \bullet \pi \cup [\bullet \pi, c_0] \cup \{b' \in B \mid \bullet b' \subseteq [\bullet \pi, c_0]\}$ , y tomaremos  $c = \{b' \in A \mid b' \bullet \cap A = \emptyset\}$ . Es relativamente sencillo demostrar que  $c$  es un  $B$ -corte. Sea  $M$  entonces el marcaje correspondiente a  $c$ . Este marcaje es alcanzable en virtud del apartado 2 del teorema 8.4. Como  $\bullet e_1 \cup \bullet e_2 \subseteq c$  y  $\bullet e_1 \cap \bullet e_2 = \emptyset$ , es claro que  $p(e_1)$  y  $p(e_2)$  están permitidas de forma concurrente.
2. Como  $M$  es un marcaje alcanzable, hay una secuencia de ocurrencia  $\sigma = M_0 t'_1 M_1 \dots t'_n M_n$ , tal que  $M_n = M$ . Entonces,  $\sigma$  es compatible con un proceso  $\pi = (N', p)$ , tal que  $\pi^\bullet$  es un  $B$ -corte correspondiente a  $M$ . Ahora bien, como  $t_1$  y  $t_2$  están permitidas concurrentemente bajo  $M$ , debe haber dos eventos  $e_1$  y  $e_2$ , etiquetados con  $t_1$  y  $t_2$  respectivamente, tales que la secuencia de ocurrencia  $\sigma = M_0 t'_1 M'_1 \dots M t_1 M' t_2 M''$  es compatible con un nuevo proceso y  $(e_1, e_2) \in co$ .

□

### 8.1.2 Procesos de Redes de Petri con la Semántica de Pasos

Aunque la definición de proceso la hemos hecho en el marco de una semántica secuencial, también es posible considerar los procesos desde la perspectiva de una

semántica de pasos. De esta forma, el concepto de proceso no sufre variaciones mientras únicamente consideremos redes finitas, que es nuestro caso, si bien, sí hemos de introducir un nuevo concepto de compatibilidad entre un proceso y una secuencia de pasos.

**Definición 8.10** (Compatibilidad entre Procesos y Secuencias de Pasos)

Sea  $N = (S, T, F, M_0)$  una Red de Petri Ordinaria Marcada T-restringida,  $\pi = (N', p)$  un proceso de  $N$  y  $\sigma = M_0 R_1 M_1 \dots R_n M_n$  una secuencia de pasos de  $N$ . Se dice que  $\sigma$  y  $\pi$  son *compatibles* si y sólo si existe una función suprayectiva  $pos : E \longrightarrow \{1, \dots, n\}$ , tal que:

1.  $\forall t \in T, \forall i \in \{1, \dots, n\}, |pos^{-1}(i) \cap p^{-1}(t)| = R_i(t)$
2.  $\forall e, e' \in E, e < e' \Rightarrow pos(e) < pos(e')$

□

**Teorema 8.8** Sea  $N = (S, T, F, M_0)$  una Red de Petri Ordinaria Marcada T-restringida,  $\pi = (N', p)$  un proceso de  $N$ , y  $\sigma = M_0 R_1 M_1 \dots R_n M_n$  una secuencia de pasos de  $N$  compatible con  $\pi$  a través de una función  $pos$ . Se definen recursivamente:

1.  $c_0 = \bullet\pi$
2.  $c_i = (c_{i-1} - \bullet pos^{-1}(i)) \cup (pos^{-1}(i))^\bullet$

Entonces:

1.  $\forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $c_i$  es un  $B$ -corte y  $\forall s \in S : M_i(s) = |p^{-1}(s) \cap c_i|$ .
2.  $[\bullet\pi, c_i] \cap E = \bigcup_{j \leq i} pos^{-1}(j)$
3.  $B = \bigcup_{i \in \{0, \dots, n\}} c_i$

**Demostración:** Similar a la del teorema 8.1.

□

**Definición 8.11** Sea  $N = (S, T, F, M_0)$  una Red de Petri Ordinaria Marcada T-restringida. Se definen:

1.  $\Sigma\Pi(\sigma) = \{\pi \mid \pi \text{ es compatible con } \sigma\}$

2.  $Step(\pi) = \{\sigma \mid \sigma \text{ es compatible con } \pi\}$

□

**Teorema 8.9** Sea  $N = (S, T, F, M_0)$  una Red de Petri Ordinaria Marcada T-restringida y  $\sigma = M_0 R_1 M_1 \dots R_n M_n$  una secuencia de pasos de  $N$ . Podemos asociar a  $\sigma$  un proceso  $\pi$  compatible con ella. De hecho, todos los procesos compatibles con  $\sigma$  son los que pueden ser contruidos de la forma indicada en la siguiente demostración.

**Demostración:** Construiremos los procesos en cuestión de forma inductiva, comenzando con  $\pi_0 = \pi_0(N)$ .

Una vez construido un proceso  $\pi_i$ , el mismo puede extenderse a un proceso  $\pi_{i+1}$  en la forma siguiente:

En primer lugar, para cada par  $x, y \in B'_i \cup E'_i$  se toma:  $p_{i+1}(x) = p_i(x)$ , con  $(x, y) \in F'_{i+1}$  sii  $(x, y) \in F'_i$ .

A continuación, para cada transición  $t_{i+1} \in R_{i+1}$  se repiten los siguientes pasos  $R_{i+1}(t_{i+1})$  veces:

1. Se añade un nuevo evento  $e$  y para cada  $s \in {}^\bullet t_{i+1}$  se elige un lugar condición  $b_s \in \pi_i^\bullet \cap p_i^{-1}(s)$ , diferente de los elegidos anteriormente, haciéndose  $p_{i+1}(e) = t_{i+1}$  y  $(b_s, e) \in F'_{i+1}$ .
2. Para cada  $s \in t_{i+1}^\bullet$  se añade un nuevo lugar condición  $b'_s$  y se hace:  $p_{i+1}(b'_s) = s$ , y  $(e, b'_s) \in F'_{i+1}$ .

Esta extensión del proceso  $\pi_i$  al  $\pi_{i+1}$  mediante el disparo del paso  $R_{i+1}$  se representará como sigue:

$$\pi_i \xrightarrow[R_{i+1}]{p} \pi_{i+1}$$

La construcción anterior termina cuando  $i = n$ . La demostración de que los  $\pi_i$  así obtenidos son procesos, y de que todos los procesos compatibles con  $\sigma$  pueden construirse en esta forma, es similar a la del teorema 8.2. □

**Teorema 8.10** Sea  $N = (S, T, F, M_0)$  una Red de Petri Ordinaria Marcada T-restringida y  $\pi = (N', p)$  un proceso de  $N$ . Entonces hay una secuencia de pasos  $\sigma$  tal que  $\pi$  puede construirse a partir de  $\sigma$  por medio de la construcción anterior.

**Demostración:** Ver [Bes86]. □

## 8.2 eap-procesos

Una modificación posible al concepto de proceso consiste en capturar de forma directa en los eventos los pasos que van ocurriendo. De esta forma, obtendremos lo que llamaremos *procesos con eventos asociados a pasos* o *eap-procesos*.

### Definición 8.12 (eap-procesos)

Sea  $N = (S, T, F, M_0)$  una Red de Petri Ordinaria Marcada T-restringida. El par  $\pi = (N', p)$ , siendo  $N' = (B, E, W)$  una Red de Ocurrencia y  $p = (p_1, p_2)$  un par de funciones de etiquetado  $p_1 : B \longrightarrow S$ ,  $p_2 : E \longrightarrow B(T)$ , es un *eap-proceso* de  $N$  si y sólo si se cumplen las condiciones siguientes:

1.  $Min(N')$  es un B-corte de  $N'$ .

2.  $\forall e \in E, \forall s \in S :$

$$\sum_{t \in p_2(e)} p_2(e)(t) \cdot F(s, t) = |p_1^{-1}(s) \cap \bullet e|$$

$$\sum_{t \in p_2(e)} p_2(e)(t) \cdot F(t, s) = |p_1^{-1}(s) \cap e^\bullet|$$

siendo  $F(f) = 1$  si  $f \in F$ , y 0 en caso contrario.

3.  $\forall s \in S, : M_0(s) = |p_1^{-1}(s) \cap Min(N')|$

□

Veamos qué relación guardan estos nuevos eap-procesos con los procesos ordinarios.

**Teorema 8.11** Sea  $N = (S, T, F, M_0)$  una Red de Petri Ordinaria Marcada T-restringida, y  $\pi = (N', p)$  un proceso de  $N$ . Entonces,  $\tilde{\pi} = (N', \tilde{p})$ , definido por  $\tilde{p}_1 = p|_B$ ,  $\tilde{p}_2(e) = \{p(e)\}$ ,  $\forall e \in E$ , es un *eap-proceso* de  $N$ .

**Demostración:** Inmediata, lo único que requiere algún comentario es la condición (2), que se obtiene como resultado de la condición (3) de proceso normal, al ser  $\tilde{p}_2(e)(p(e)) = 1$ ,  $\forall e \in E$ . □

Veamos que podemos encontrar un recíproco.

**Definición 8.13** Sea  $N = (S, T, F, M_0)$  una Red de Petri Ordinaria Marcada T-restringida, y sea  $\pi = (N', p)$  un eap-proceso de  $N$ . Definimos  $\tilde{\pi} = (\tilde{N}, \tilde{p})$  como sigue:

$$\tilde{B} = B$$

$$\tilde{E} = \bigcup_{e \in E} \bigcup_{t \in T, p_2(e)(t) > 0} \{e_1^t, \dots, e_{p_2(e)(t)}^t\}$$

Por la condición 2 de la definición de eap-proceso tenemos para cada  $s \in S$  y cada  $e \in E$ :  $|p_1^{-1}(s) \cap \bullet e| = \sum_{t \in p_2(e)} p_2(e)(t) \cdot F(s, t)$ .

De ahí concluimos que para cada  $t \in p_2(e)$ ,  $t \in s^\bullet$  existe un conjunto de lugares  $\{b_1^t, \dots, b_{p_2(e)(t)}^t\} \subseteq p_1^{-1}(s) \cap \bullet e$ . De hecho se tiene:

$$p_1^{-1}(s) \cap \bullet e = \bigcup_{t \in p_2(e), t \in s^\bullet} \{b_1^t, \dots, b_{p_2(e)(t)}^t\}$$

Por lo tanto, podemos definir una biyección  $\psi_{s,e}(b_j^t) = e_j^t$ .

Análogamente, para cada  $s \in S$ , cada  $e \in E$  y cada  $t \in \bullet s$ ,  $t \in p_2(e)$  existe un conjunto de lugares  $\{\hat{b}_1^t, \dots, \hat{b}_{p_2(e)(t)}^t\} \subseteq p_1^{-1}(s) \cap e^\bullet$ , tal que:

$$p_1^{-1}(s) \cap e^\bullet = \bigcup_{t \in p_2(e), t \in \bullet s} \{\hat{b}_1^t, \dots, \hat{b}_{p_2(e)(t)}^t\}$$

Entonces podemos definir una biyección  $\Phi_{s,e}(\hat{b}_j^t) = e_j^t$ .

Definimos entonces  $\tilde{F}$  como sigue:

$\tilde{F} = \tilde{F}_1 \cup \tilde{F}_2$ , siendo:

$$\tilde{F}_1 = \bigcup_{e \in E} \bigcup_{s \in S, p_1^{-1}(s) \cap \bullet e \neq \emptyset} \bigcup_{t \in p_2(e), t \in s^\bullet} \{(b_j^t, \psi_{s,e}(b_j^t)) \mid j = 1, \dots, p_2(e)(t)\}$$

$$\tilde{F}_2 = \bigcup_{e \in E} \bigcup_{s \in S, p_1^{-1}(s) \cap e^\bullet \neq \emptyset} \bigcup_{t \in p_2(e), t \in \bullet s} \{(\Phi_{s,e}(\hat{b}_j^t), \hat{b}_j^t) \mid j = 1, \dots, p_2(e)(t)\}$$

$$\tilde{p}(b) = p_1(b), \forall b \in \tilde{B}$$

$$\tilde{p}(e_j^t) = t, \forall e_j^t \in \tilde{E}.$$

La comprobación de que  $\tilde{\pi}$  es efectivamente un proceso es sencilla. El único punto que requiere algún comentario es la prueba de que  $F(s, \tilde{p}(e_j^t)) = |\tilde{p}^{-1}(s) \cap \bullet e_j^t|$ ,  $F(\tilde{p}(e_j^t), s) = |\tilde{p}^{-1}(s) \cap e_j^t|$ ,  $\forall e_j^t \in \tilde{E}$ ,  $\forall s \in S$ .

Si  $(s, \tilde{p}(e_j^t)) \in F$ , entonces  $(s, t) \in F$ . Sea el evento  $e \in E$  desde el que se obtiene el  $e_j^t$ . Entonces tenemos  $t \in s^\bullet \cap p_2(e)$ . De ahí, por la definición de  $\tilde{F}$  tenemos un único  $b_j^t$  tal que  $(b_j^t, e_j^t) \in \tilde{F}$ .

Si, por el contrario,  $(s, \tilde{p}(e_j^t)) \notin F$ , entonces  $\tilde{p}^{-1}(s) \cap \bullet e_j^t = \emptyset$ , porque en caso contrario, existiría  $b_j^t \in \tilde{p}^{-1}(s) \cap \bullet e_j^t$ , y por tanto,  $(s, t) \in F$ , lo que contradice la hipótesis de partida. Para  $(\tilde{p}(e_j^t), s)$  se razona de forma análoga.  $\square$

En la siguiente definición, dado un *eap-proceso*  $\pi$ , la extensión en un paso a  $\pi'$  se hace de la forma usual, añadiendo en este caso un único evento correspondiente a dicho paso.

**Definición 8.14** Sea  $N = (S, T, F, M_0)$  una Red de Petri Ordinaria Marcada T-restringida, y sea  $\pi = (N', p)$  un *eap-proceso* de  $N$ , con  $N' = (B, E, W)$ . Sea  $R$  un multiconjunto de transiciones. Decimos que  $\pi$  puede ser extendido por  $R$  si y sólo si  $\forall t \in R$  y  $\forall s \in {}^\bullet t$  existen  $b_{t,1}^s, \dots, b_{t,R(t)}^s \in \pi^\bullet$  tales que  $p_1(b_{t,j}^s) = s$ , para todo  $j \in \{1, \dots, R(t)\}$ .

Decimos entonces que  $\pi'$  es una *extensión de  $\pi$  por  $R$* , lo que denotamos por  $\pi \xrightarrow{R}_{\text{eap}} \pi'$ , si se verifican las condiciones siguientes:

$$\begin{aligned} \pi' &= (N'', p''), \text{ siendo } N'' = (B'', E'', W''), \text{ donde} \\ B'' &= B \cup \{\hat{b}_{t,1}^s, \dots, \hat{b}_{t,R(t)}^s \mid t \in R, s \in {}^\bullet t\} \\ E'' &= E \cup \{e_R\} \\ W'' &= W \cup \{(b_{t,j}^s, e_R) \mid t \in R, s \in {}^\bullet t, 1 \leq j \leq R(t)\} \cup \\ &\quad \{(e_R, \hat{b}_{t,j}^s) \mid t \in R, s \in {}^\bullet t, 1 \leq j \leq R(t)\} \\ p_2''(e) &= \begin{cases} p_2(e) & \text{si } e \neq e_R \\ R & \text{si } e = e_R \end{cases} \\ p_1''(b) &= \begin{cases} p_1(b) & \text{si } b \in B \\ s & \text{si } b = \hat{b}_{t,j}^s \end{cases} \end{aligned}$$

Veamos que  $\pi'$  es efectivamente un *eap-proceso*:

- $\text{Min}(N'')$  es un  $B''$ -corte de  $N''$ , pues  $\text{Min}(N'') = \text{Min}(N')$ , y  $B \subseteq B''$ .
- $\forall e \in E'', \forall s \in S :$

$$\sum_{t \in p_2''(e)} p_2''(e)(t) \cdot F(s, t) = |p_1''^{-1}(s) \cap {}^\bullet e|$$

Si  $e \neq e_R$ , al ser  $\pi$  un *eap-proceso*, esto se obtiene inmediatamente. Si, por el contrario,  $e = e_R$ , entonces dado  $s \in S$  tenemos:

$$p_1''^{-1}(s) \cap {}^\bullet e_R = \{b_{t,1}^s, \dots, b_{t,R(t)}^s \mid t \in s^\bullet, t \in R\}$$

Es decir, en total hay  $\sum_{t \in s^\bullet} R(t)$  elementos, expresión que coincide con

$$\sum_{t \in p_2''(e_R)} p_2''(e_R)(t) \cdot F(s, t), \text{ pues } p_2''(e_R) = R.$$

La ecuación dual correspondiente a las postcondiciones se prueba de idéntica forma.

- $\forall s \in S : M_0(s) = |p_1''(s) \cap \text{Min}(N'')|$ .

Es inmediata, teniendo en cuenta que  $p_1''|_{\text{Min}(N')} = p_1|_{\text{Min}(N')}$  y que  $\text{Min}(N') = \text{Min}(N'')$ .

□

El teorema siguiente nos permite relacionar los eap-procesos con los procesos normales. En él denotamos por  $\Psi$  la función que a cada eap-proceso le asocia el proceso definido en la Def. 8.13.

**Teorema 8.12** Sea  $N = (S, T, F, M_0)$  una Red de Petri Ordinaria Marcada T-restringida,  $R$  un multiconjunto de transiciones y  $\pi$  un eap-proceso de  $N$ .

Entonces el diagrama de la figura 40 es conmutativo (salvo isomorfismo de procesos).

**Demostración:** Aplicando  $R$  con la semántica eap primero y luego  $\Psi$  obtenemos  $\tilde{\pi}' = ((\tilde{B}', \tilde{E}', \tilde{F}'), \tilde{p}')$ , que vendrá dado por:

$$\begin{aligned} \tilde{B}' &= B'' = B \cup \{\hat{b}_{t,1}^s, \dots, \hat{b}_{t,R(t)}^s \mid t \in T, s \in t^\bullet\} \\ \tilde{E}' &= \bigcup_{e \in E''} \bigcup_{t \in T, t \in p_2''(e)} \{e_1^t, \dots, e_{p_2''(e)(t)}^t\} = \bigcup_{e \in E \cup \{e_R\}} \bigcup_{t \in T, t \in p_2''(e)} \{e_1^t, \dots, e_{p_2''(e)(t)}^t\} \\ \tilde{F}' &= \bigcup_{e \in E''} \bigcup_{s \in S, p_1''^{-1}(s) \cap e^\bullet \neq \emptyset} \bigcup_{t \in p_2''(e), t \in s^\bullet} \{(b_j^{t,1}, e_j^t) \mid j = 1, \dots, p_2''(e)(t)\} \cup \\ &\quad \bigcup_{e \in E''} \bigcup_{s \in S, p_1''^{-1}(s) \cap e^\bullet \neq \emptyset} \bigcup_{t \in p_2''(e)(t), t \in s^\bullet} \{(e_j^t, b_j^{t,2}) \mid j = 1, \dots, p_2''(e)(t)\} \\ \tilde{p}'(b) &= p_1''(b) \\ \tilde{p}'(e_j^t) &= t, \forall e_j^t \in \tilde{E}' \end{aligned}$$

Sea ahora  $\bar{\pi}'$  el proceso obtenido aplicando en primer lugar  $\Psi$  y luego la semántica de procesos clásica. Bajo dicha semántica para cada instancia  $t_j$  de una transición  $t \in T$  se crea un nuevo evento  $e_j'(t)$ , y para cada lugar  $s \in t_j^\bullet$  se crea un nuevo lugar  $b_j(t, s)$ .

Entonces,  $\bar{\pi}'$  es como sigue:

$$\begin{array}{ccc}
 \pi & \xrightarrow{R} & \pi' \\
 \Psi \downarrow & \text{eap} & \downarrow \Psi \\
 \tilde{\pi} & \xrightarrow{p} & \tilde{\pi}'
 \end{array}$$

Figura 40: Diagrama conmutativo

$$\bar{B}' = B \cup \{b_j(t, s) \mid t \in R, s \in t^\bullet, 1 \leq j \leq R(t)\}$$

$$\bar{E}' = \tilde{E} \cup \{e'_j(t) \mid t \in R, 1 \leq j \leq R(t)\} =$$

$$\bigcup_{e \in E} \bigcup_{t \in T, t \in p_2(e)} \{\bar{e}_1^t, \dots, \bar{e}_{p_2(e)(t)}^t\} \cup \{e'_j(t) \mid t \in R, 1 \leq j \leq R(t)\}$$

$$\bar{F}' = \tilde{F} \cup \{(\hat{b}_j(t, s), e'_j(t)) \mid t \in R, s \in t^\bullet, 1 \leq j \leq R(t)\} \cup$$

$$\{(e'_j(t), b_j(t, s)) \mid t \in R, s \in t^\bullet, 1 \leq j \leq R(t)\} =$$

$$\bigcup_{e \in E} \bigcup_{s \in S, p_1^{-1}(s) \cap e^\bullet \neq \emptyset} \bigcup_{t \in p_2(e), t \in s^\bullet} \{(b_j^{t,3}, \bar{e}_j^t) \mid j = 1, \dots, p_2(e)(t)\} \cup$$

$$\bigcup_{e \in E} \bigcup_{s \in S, p_1^{-1}(s) \cap e^\bullet \neq \emptyset} \bigcup_{t \in p_2(e), t \in s^\bullet} \{(\bar{e}_j^t, b_j^{t,4}) \mid j = 1, \dots, p_2(e)(t)\} \cup$$

$$\{(\hat{b}_j(t, s), e'_j(t)) \mid t \in R, s \in t^\bullet, 1 \leq j \leq R(t)\} \cup$$

$$\{(e'_j(t), b_j(t, s)) \mid t \in R, s \in t^\bullet, 1 \leq j \leq R(t)\}$$

$$\bar{p}'(b) = \begin{cases} \tilde{p}(b) & \text{si } b \neq b_j(t, s) \\ s & \text{si } b = b_j(t, s) \end{cases}$$

$$\bar{p}'(e'_j(t)) = t$$

$$\bar{p}'(\bar{e}_j^t) = \tilde{p}(\bar{e}_j^t) = t$$

Para ver que  $\bar{\pi}' \cong \tilde{\pi}'$  construimos la función

$$\beta : \bar{B}' \cup \bar{E}' \longrightarrow \tilde{B}' \cup \tilde{E}'$$

definida como sigue:

$$\begin{aligned}
 \beta(b) &= \begin{cases} b & \text{si } b \in B \\ \hat{b}_{t,j}^s & \text{si } b = b_j(t, s) \end{cases} \\
 \beta(e'_j(t)) &= e_j^t, \text{ para } e = e_R \\
 \beta(\bar{e}_j^t) &= e_j^t, \text{ para } e \in E
 \end{aligned}$$

Es pesado, pero no difícil probar que  $\beta$  es biyectiva, que  $\forall x \in \bar{B}' \cup \bar{E}' : \bar{p}'(x) = \tilde{p}'(\beta(x))$ , y que  $\forall x_1, x_2 \in \bar{B}' \cup \bar{E}' : x_1 \leq_{\bar{\pi}'} x_2 \text{ sii } \beta(x_1) \leq_{\tilde{\pi}'} \beta(x_2)$ .

Por lo tanto,  $\bar{\pi}' \cong \tilde{\pi}'$ .

□



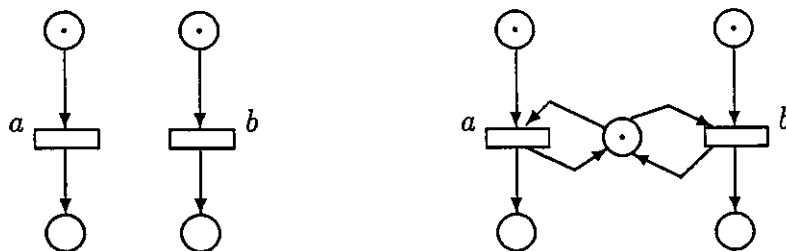


Figura 41: Dos Redes de Petri identificadas por la bisimulación basada en interleaving.

### 8.3 Bisimulación P.H. para Redes 1-Seguras

En esta sección presentamos la bisimulación preservando historias, introducida en [RT88] y estudiada por W. Vogler (ver [Vog91]) para redes 1-seguras sin transiciones internas, y una semántica de secuencias de ocurrencia. Posteriormente extenderemos la misma a la semántica de pasos y a redes n-seguras. El motivo para no considerar transiciones internas es que cuando se admiten acciones internas la bisimulación preservando historias deja de ser una congruencia con respecto al refinamiento de acciones (reemplazamiento de una acción por un subsistema de acciones), lo que hace que dicha noción general resulte menos interesante.

Usualmente la bisimulación se define en términos de una semántica de interleaving (ver definición siguiente). Sin embargo, bajo dicha semántica la bisimulación identifica sistemas que se diferencian en el nivel de concurrencia real que exhiben. Por ejemplo, la bisimulación basada en interleaving identifica los dos sistemas de la figura 41.

#### Definición 8.15 (Bisimulación Basada en Interleaving)

1. Siendo  $N = (S, T, F, M_0)$  una Red de Petri Ordinaria Marcada T-restringida,  $\Sigma$  un alfabeto finito y  $\lambda : T \rightarrow \Sigma$  una función de etiquetado, diremos que la tupla  $(S, T, F, M_0, \lambda)$  es un *sistema etiquetado*.
2. Sea  $\Sigma$  un alfabeto finito y  $N_1 = (S_1, T_1, F_1, M_0^1, \lambda_1)$ ,  $N_2 = (S_2, T_2, F_2, M_0^2, \lambda_2)$  dos sistemas etiquetados sobre  $\Sigma$ . Se dice que  $N_1$  y  $N_2$  son *bisimilares* si y sólo si existe una relación  $\rho \subseteq [M_0^1] \times [M_0^2]$  tal que:

$$(a) \quad (M_0^1, M_0^2) \in \rho$$

(b) Si  $(M_1, M_2) \in \rho$ , entonces:

- i.  $\forall t_1 \in T_1$  tal que  $M_1[t_1]_1 M'_1$  existe un  $t_2 \in T_2$  tal que  $M_2[t_2]_2 M'_2$ , con  $(M'_1, M'_2) \in \rho$ , y  $\lambda_1(t_1) = \lambda_2(t_2)$ .
- ii.  $\forall t_2 \in T_2$  tal que  $M_2[t_2]_2 M'_2$  existe un  $t_1 \in T_1$  tal que  $M_1[t_1]_1 M'_1$ , con  $(M'_1, M'_2) \in \rho$ , y  $\lambda_1(t_1) = \lambda_2(t_2)$ .

□

La bisimulación preservando historias es capaz de capturar, aún basada en la semántica de interleaving, el grado de concurrencia real exhibido por un proceso, lo que en particular permite distinguir las dos redes de la figura 41. De hecho, nuestra primera aportación al tema consistirá en la prueba de que dicha noción de equivalencia no cambia aunque pasemos a definirla basada en la semántica de pasos.

Comenzamos definiendo las estructuras de eventos (ver [Win86]).

**Definición 8.16** (Estructuras de eventos)

Sea  $\Sigma$  un conjunto infinito (*alfabeto de acciones*). Una *estructura de eventos* sobre el alfabeto  $\Sigma$  es una tupla  $ev = (E, \leq, \#, \lambda)$ , siendo  $E$  un conjunto (*conjunto de eventos*),  $\leq$  una relación de orden parcial sobre  $E$  (*relación de causalidad*),  $\#$  una relación simétrica y no-reflexiva sobre  $E$  (*relación de conflicto*) y  $\lambda$  una función de etiquetado  $\lambda : E \rightarrow \Sigma$ .

La relación de causalidad se interpreta en la forma siguiente: si  $e \leq e'$ , con  $e \neq e'$ , entonces la ocurrencia de  $e$  es una precondition necesaria para que ocurra  $e'$ . En consecuencia, usualmente se impone la siguiente restricción (*principio de causa finita*):

$$\forall e \in E \quad |\{e' \in E \mid e' \leq e\}| < \infty$$

El motivo de incluir esta restricción es que suponemos que en un intervalo de tiempo limitado sólo pueden ocurrir una cantidad finita de eventos, por lo que jamás podrán ocurrir eventos con una cantidad infinita de causas.

La relación de conflicto indica que cuando se tiene  $e \# e'$ , a lo largo de una historia sólo puede ocurrir uno de ellos. Con respecto a esta relación se impone también usualmente el denominado *principio de conflicto hereditario*:

$$\forall e, e', e'' \quad e \# e' \wedge e' \leq e'' \Rightarrow e \# e''$$

El motivo de incluir esta restricción es que al ser  $e'$  una precondition necesaria de  $e''$ , si se resuelve el conflicto entre  $e$  y  $e'$  ejecutando  $e$ , entonces  $e''$  ya no podrá ejecutarse.

Una estructura de eventos  $ev$  se dice que es una *estructura de eventos libre de conflictos* sii  $\forall e, e' \in E : \neg e \# e'$ . En tal caso omitiremos (por innecesaria) la relación de conflicto.  $\square$

**Definición 8.17** (Isomorfismo entre Estructuras de eventos libres de conflictos) Diremos que dos estructuras de eventos libres de conflictos  $ev_1 = (E_1, \leq_1, \lambda_1)$ ,  $ev_2 = (E_2, \leq_2, \lambda_2)$  son isomorfas ( $ev_1 \cong ev_2$ ) sii existe una biyección

$$\beta : E_1 \longrightarrow E_2$$

tal que:

1.  $\forall e \in E_1 : \lambda_1(e_1) = \lambda_2(\beta(e_1))$
2.  $\forall e_1, e_2 \in E_1, : e_1 \leq_1 e_2$  sii  $\beta(e_1) \leq_2 \beta(e_2)$

$\square$

**Definición 8.18** (Estructura de Eventos Asociada a un Proceso)

Sea  $N = (S, T, F, M_0, \lambda)$  un sistema etiquetado T-restringido y sea  $\pi = (N', p)$ , con  $N' = (B, E, F')$ , un proceso de  $N$ . Se define la *estructura de eventos asociada a  $\pi$*  de la forma siguiente:

$$ev(\pi) = (E, \leq_\pi |_{E \times E}, \lambda \circ p|_E)$$

Evidentemente, como los procesos son redes de ocurrencia, están exentos de conflictos, y por tanto, esta estructura de eventos es una estructura de eventos libre de conflictos.  $\square$

**Definición 8.19** (Bisimulación Preservando Historias)

Sea  $\Sigma$  un alfabeto finito y sean  $N_i = (S_i, T_i, F_i, M_0^i, \lambda_i)$ , con  $i = 1, 2$  dos sistemas etiquetados sobre  $\Sigma$  T-restringidos. Un conjunto  $\mathcal{R}$  de triples  $(\pi_1, \pi_2, f)$ , con  $\pi_1$  un proceso de  $N_1$ ,  $\pi_2$  un proceso de  $N_2$  y  $f : ev(\pi_1) \longrightarrow ev(\pi_2)$  un isomorfismo entre estructuras de eventos exentas de conflictos, se dice que es una *bisimulación preservando historias* para  $N_1$  y  $N_2$  si y sólo si se cumplen las condiciones siguientes:

1.  $(\pi_0(N_1), \pi_0(N_2), \emptyset) \in \mathcal{R}$ .
2. Si  $(\pi_1, \pi_2, f) \in \mathcal{R}$ , y  $\pi_1 \xrightarrow{t_1} \pi'_1$  (esta noción de extensión de procesos por transiciones fue introducida en la prueba del teorema 8.2), entonces existen  $t_2 \in T_2$ ,  $\pi'_2$ ,  $f'$ , tales que  $\pi_2 \xrightarrow{t_2} \pi'_2$ ,  $(\pi'_1, \pi'_2, f') \in \mathcal{R}$ , y  $f'|_{ev(\pi_1)} = f$ .
3. Simétricamente, si  $(\pi_1, \pi_2, f) \in \mathcal{R}$ , y  $\pi_2 \xrightarrow{t_2} \pi'_2$ , entonces existen  $t_1 \in T_1$ ,  $\pi'_1$ ,  $f'$ , tales que  $\pi_1 \xrightarrow{t_1} \pi'_1$ ,  $(\pi'_1, \pi'_2, f') \in \mathcal{R}$ , y  $f'|_{ev(\pi_1)} = f$ .

Si existe una bisimulación preservando historias para  $N_1$  y  $N_2$ , se dice que éstas son *bisimilares preservando historias*.  $\square$

Con esta definición, los procesos vienen a ser estados del sistema. La restricción impuesta a los triples que forman una bisimulación indica que si  $\pi_1$  y  $\pi_2$  son dos procesos relacionados, entonces sus estructuras de eventos asociadas son isomorfas (vía  $f$ ). La condición (1) establece que los estados iniciales de ambos sistemas están relacionados, mientras que las condiciones (2) y (3) garantizan que si un sistema puede evolucionar ejecutando una transición asociada a una cierta acción  $a$ , entonces el otro puede ejecutar otra transición, asociada a la misma acción  $a$ , de modo que los procesos resultantes están relacionados.

Al trabajar sobre procesos cuyas estructuras de eventos son isomorfas se consigue capturar el orden parcial de eventos, con lo que se captura el nivel de concurrencia real exhibido por un proceso.

En [Vog91], Vogler ha probado que el problema de determinar si dos sistemas etiquetados 1-seguros son bisimilares preservando historias es decidible. No es ésta una cuestión inmediata, pues aún cuando el número de posibles marcajes sea finito, no lo es sin embargo el sistema de transición que aparece implícitamente en la definición de bisimulación preservando historias. Para resolver el problema Vogler introduce el concepto de *marcaje ordenado*, que captura en sus tokens el orden de generación de los mismos; con esta información es posible definir una nueva relación que llamaremos *OM-bisimulación*, que será equivalente a la bisimulación preservando historias.

#### Definición 8.20 (Marcajes Ordenados)

Sea  $N = (S, T, F, M_0, \lambda)$  un sistema etiquetado 1-seguro (lo que nos permite identificar un marcaje con un subconjunto de lugares). Un *marcaje ordenado* de  $N$

es un par  $(M, \leq)$ , donde  $M \subseteq S$ , y  $\leq$  es un preorden (es decir, es una relación reflexiva y transitiva) sobre  $M$ .

El *marcaje ordenado inicial* se define como sigue:

$$\text{init}(N) = (M_0, M_0 \times M_0)$$

El conjunto de marcajes ordenados se denota por  $OM(N)$ . □

**Definición 8.21** (Evolución de Marcajes Ordenados)

Sea  $N = (S, T, F, M_0, \lambda)$  un sistema etiquetado 1-seguro,  $M, M'$  marcajes de  $N$ , y  $t \in T$  tal que:  $M[t]M'$ . Entonces, si  $(M, \leq)$  es un marcaje ordenado, decimos que  $t$  *está permitida bajo dicho marcaje ordenado*, lo que denotamos de la forma siguiente:  $(M, \leq)[t]$ . El disparo de  $t$  en tales circunstancias genera el marcaje ordenado  $(M', \leq')$ , donde  $\leq'$  está definida como sigue:  $\forall s, s' \in M', s \leq' s'$  si y sólo si ocurre una de las tres condiciones siguientes:

- $s, s' \in M - \bullet t \wedge s \leq s'$ , ó
- $s \in M - \bullet t, s' \in t \bullet \wedge \exists s'' \in \bullet t$  tal que  $s \leq s''$ , ó
- $s, s' \in t \bullet$ .

Es inmediato comprobar que la definición es correcta, es decir, que  $\leq'$  es un preorden.

La extensión a secuencias de ocurrencia es inmediata, de forma que diremos que un marcaje ordenado  $(M, \leq)$  es *alcanzable* sii existe una secuencia de ocurrencia  $\sigma$  tal que  $\text{init}(N)[\sigma](M, \leq)$ . □

A continuación vamos a relacionar los marcajes ordenados con los procesos.

**Definición 8.22** Sea  $N = (S, T, F, M_0, \lambda)$  un sistema etiquetado 1-seguro,  $\pi = (N', p)$  un proceso de  $N$  y  $(M, \leq)$  un marcaje ordenado. Decimos que  $(M, \leq)$  es generado por el proceso  $\pi$ , y lo escribimos  $\text{init}(N)[\pi](M, \leq)$ , sii  $p$  es una biyección entre  $\pi \bullet$  y  $M$ , tal que  $\forall b, b' \in \pi \bullet$  tenemos  $p(b) \leq p(b') \Leftrightarrow b \in \bullet \pi \vee (\bullet b, \bullet b' \neq \emptyset \wedge \bullet b \leq_\pi \bullet b')$ . □

Teniendo en cuenta que para todo proceso la aplicación  $p$  es inyectiva sobre  $\pi \bullet$ , que  $p(\pi \bullet)$  es un marcaje alcanzable, y que  $\leq_\pi$  es un orden parcial, es sencillo ver que para todo proceso  $\pi$ , el marcaje ordenado  $(M, \leq)$  existe y es único.

El siguiente lema nos dice que la definición de marcaje ordenado es coherente con la definición introducida de evolución de marcajes ordenados.

**Lema 8.1** Sea  $N = (S, T, F, M_0, \lambda)$  un sistema etiquetado 1-seguro,  $\pi$  un proceso de  $N$ ,  $t \in T$  y  $(M, \leq)$ ,  $(M', \leq')$  marcajes ordenados tales que  $\text{init}(N)[\pi](M, \leq)$ . Entonces,  $(M, \leq)[t](M', \leq')$  si y sólo si existe un proceso  $\pi'$  tal que  $\pi \xrightarrow{t} \pi'$  y  $\text{init}(N)[\pi'](M', \leq')$ .

**Demostración:** Ver [Vog91]. □

**Definición 8.23** (OM-bisimulación)

Sea  $\Sigma$  un alfabeto finito, y  $N_1 = (S_1, T_1, F_1, M_0^1, \lambda_1)$ ,  $N_2 = (S_2, T_2, F_2, M_0^2, \lambda_2)$  dos sistemas etiquetados sobre  $\Sigma$  1-seguros. Una relación  $\mathcal{B} \subseteq OM(N_1) \times OM(N_2) \times \mathcal{P}(S_1 \times S_2)$  es una *OM-bisimulación* sii:

1.  $(\text{init}(N_1), \text{init}(N_2), M_0^1 \times M_0^2) \in \mathcal{B}$
2. Si  $((M_1, \leq_1), (M_2, \leq_2), \beta) \in \mathcal{B}$ , y  $(M_1, \leq_1)[t_1](M'_1, \leq'_1)$ , entonces existen  $t_2 \in T_2$ , y  $(M'_2, \leq'_2)$  tales que:
  - $\lambda_1(t_1) = \lambda_2(t_2)$ ,  $(M_2, \leq_2)[t_2](M'_2, \leq'_2)$ , de modo que para  $\beta'$  definido de la forma siguiente:  $\forall s_1 \in M'_1, \forall s_2 \in M'_2, (s_1, s_2) \in \beta'$  sii  $(s_1 \in M_1 - \bullet t_1, s_2 \in M_2 - \bullet t_2, (s_1, s_2) \in \beta) \vee (s_1 \in t_1^\bullet, s_2 \in t_2^\bullet)$  se tiene  $((M'_1, \leq'_1), (M'_2, \leq'_2), \beta') \in \mathcal{B}$ .
  - $\forall s_1 \in \bullet t_1 \exists s'_1 \in \bullet t_1, s'_2 \in \bullet t_2$ , tales que  $s_1 \leq_1 s'_1$ , y  $(s'_1, s'_2) \in \beta$ .
  - $\forall s_2 \in \bullet t_2 \exists s'_2 \in \bullet t_2, s'_1 \in \bullet t_1$ , tales que  $s_2 \leq_2 s'_2$ , y  $(s'_1, s'_2) \in \beta$ .
3. Simétrico a 2, intercambiando los papeles de  $N_1$  y  $N_2$ .

Si existe una OM-bisimulación para  $N_1$  y  $N_2$ , se dice que éstos son *OM-bisimilares*. □

La condición (1) establece que los marcajes ordenados iniciales deben estar relacionados, y que todos los tokens de dichos marcajes iniciales están relacionados entre sí. Las condiciones (2) y (3) establecen que si un sistema puede evolucionar ejecutando una transición asociada a una cierta acción, el otro puede ejecutar otra transición asociada a la misma acción, quedando los tokens producidos por

ambos disparos relacionados a través de la correspondiente relación  $\beta'$ , y estando los tokens consumidos no necesariamente relacionados de una forma directa, pero sí verificándose que cada token consumido por  $t_1$  preceda a algún token relacionado con un token consumido por  $t_2$ , y viceversa.

Seguidamente presentamos el resultado central de esta sección, debido a Vogler, que establece la equivalencia entre la bisimulación preservando historias y la OM-bisimulación.

**Teorema 8.13** Sea  $\Sigma$  un alfabeto finito y sean  $N_1, N_2$  dos sistemas etiquetados sobre  $\Sigma$  1-seguros. Entonces,  $N_1, N_2$  son bisimilares preservando historias sii son OM-bisimilares.

**Demostración:** Ver [Vog91]. □

**Corolario 8.2** Es decidible si dos sistemas etiquetados 1-seguros son bisimilares preservando historias.

**Demostración:** Es una consecuencia inmediata de que la bisimulación preservando historias sea equivalente a la OM-bisimulación, pues el número de elementos posibles de una OM-bisimulación es finito, así como las posibles OM-bisimulaciones entre dos redes cualesquiera. □

### 8.3.1 Bisimulación P.H. bajo la Semántica de Pasos

Veremos en esta breve sección que la extensión a pasos de la bisimulación preservando historias no supone ninguna variación con relación a la noción basada en la semántica ordinaria. Evidentemente, en el caso que nos ocupa, al estar restringidos a redes 1-seguras, los pasos sólo pueden ser conjuntos de transiciones, y no multiconjuntos.

**Definición 8.24** (Bisimulación Preservando Historias bajo la Semántica de Pasos) Sea  $\Sigma$  un alfabeto finito y  $N_1, N_2$  dos sistemas etiquetados sobre  $\Sigma$  1-seguros. Un conjunto  $\mathcal{R}$  de triples de la forma  $(\pi_1, \pi_2, f)$ , con  $\pi_1$  un proceso de  $N_1$ ,  $\pi_2$  un proceso de  $N_2$ , y  $f : ev(\pi_1) \longrightarrow ev(\pi_2)$  un isomorfismo entre estructuras de eventos exentas de conflictos, se dice que es una *bisimulación preservando historias para la semántica de pasos* sii se satisfacen las condiciones siguientes:

1.  $(\pi_0(N_1), \pi_0(N_2), \emptyset) \in \mathcal{R}$
2. Si  $(\pi_1, \pi_2, f) \in \mathcal{R}$ , y  $\pi_1 \xrightarrow{R_1}_p \pi'_1$  para un cierto paso  $R_1$  en  $T_1$  (la extensión de procesos por pasos fue introducida en la prueba del teorema 8.9), entonces existe un paso  $R_2$  en  $T_2$ , y existen  $\pi'_2, f'$ , tales que  $\pi_2 \xrightarrow{R_2}_p \pi'_2$ ,  $(\pi'_1, \pi'_2, f') \in \mathcal{R}$ , y  $f'|_{ev(\pi_1)} = f$ .
3. Si  $(\pi_1, \pi_2, f) \in \mathcal{R}$ , y  $\pi_2 \xrightarrow{R_2}_p \pi'_2$  para algún paso  $R_2$  en  $T_2$ , entonces existe un paso  $R_1$  en  $T_1$ , y existen  $\pi'_1, f'$ , tales que  $\pi_1 \xrightarrow{R_1}_p \pi'_1$ ,  $(\pi'_1, \pi'_2, f') \in \mathcal{R}$ , y  $f'|_{ev(\pi_1)} = f$ .

Si existe una bisimulación preservando historias bajo la semántica de pasos para  $N_1$  y  $N_2$ , se dice que éstas son *bisimilares preservando historias con la semántica de pasos*.  $\square$

**Teorema 8.14** Sean  $N_1, N_2$  dos sistemas etiquetados 1-seguros. Entonces  $N_1, N_2$  son bisimilares preservando historias con la semántica de secuencias de ocurrencia sii son bisimilares preservando historias con la semántica de pasos.

**Demostración:**

$\Rightarrow$ : Supongamos que  $N_1, N_2$  son bisimilares preservando historias con la semántica de secuencias de ocurrencia. En ese caso, existe un conjunto de triples  $\mathcal{R}$  que cumple las condiciones de la definición 8.19. Veamos que el mismo conjunto  $\mathcal{R}$  es también una bisimulación preservando historias con la semántica de pasos. Para ello, sea  $(\pi_1, \pi_2, f) \in \mathcal{R}$ , y sea un conjunto de transiciones  $R_1 \subseteq T_1$ , tal que  $\pi_1 \xrightarrow{R_1}_p \pi'_1$ . Es claro que podemos disparar las transiciones de  $R_1$  en secuencia, dando lugar a una serie de procesos intermedios:

$$\pi_1 \xrightarrow{t_{1,1}} \pi_{1,1} \xrightarrow{t_{1,2}} \dots \pi'_1$$

Como  $N_1$  y  $N_2$  son bisimilares preservando historias para la semántica de secuencias de ocurrencia, para cada  $t_{1,i}$  existe una  $t_{2,i}$ , una función  $f_i$  y un proceso  $\pi_{2,i}$ , tales que:

$$\pi_2 \xrightarrow{t_{2,1}} \pi_{2,1} \xrightarrow{t_{2,2}} \dots \pi'_2$$

Hemos de probar entonces que el conjunto de transiciones  $t_{2,i}$  puede ser disparado en un único paso en  $N_2$ , o lo que es lo mismo, que sus precondiciones son dos a dos disjuntas, pues no olvidemos que trabajamos en redes 1-seguras.



Para ello procedamos por reducción al absurdo. Supongamos que existen  $t_{2,i}$  y  $t_{2,j}$ , con  $i < j$  (de hecho podemos suponer que  $j$  es el menor índice para el que ocurre esto) y un lugar  $s$  tal que  $s \in {}^*t_{2,i} \cap {}^*t_{2,j}$ ; sea  $b_i(s)$  el lugar condición asociado a  $s$  en  $\pi_{2,i-1}$ , utilizado para extender dicho proceso, y  $b_j(s)$  el correspondiente en  $\pi_{2,j-1}$ .

Sea entonces  $e_{1,i}$  el evento asociado al disparo de la transición  $t_{1,i}$  en  $\pi_{1,i}$  ( $p_{1,i}(e_{1,i}) = t_{1,i}$ ), y sea  $e_{1,j}$  el evento asociado al disparo de la transición  $t_{1,j}$  en  $\pi_{1,j}$  ( $p_{1,j}(e_{1,j}) = t_{1,j}$ ). Sea además  $e_{2,i} = f_i(e_{1,i})$ , el evento asociado a  $t_{2,i}$  en  $\pi_{2,i}$ , y  $e_{2,j} = f_j(e_{1,j})$ , el evento asociado a  $t_{2,j}$  en  $\pi_{2,j}$ .

Entonces concluimos que  $e_{2,i} \rightarrow^* b_j(s)$ , pues el disparo de  $t_{2,j}$  requiere que el lugar  $s$  recupere el token que pierde al disparar  $t_{2,i}$ , lo que necesariamente implica la existencia de un circuito en la red  $N_2$  que involucra al lugar  $s$ .

De ahí,  $e_{2,i} <_{\pi_2} e_{2,j}$ , y teniendo en cuenta que  $f_j$  es un isomorfismo:  $e_{1,i} <_{\pi_1} e_{1,j}$ , lo que es absurdo pues eso implica que  $t_{1,j}$  necesita algún token producido como efecto de  $t_{1,i}$ .

$\Leftarrow$ : Inmediata. □

## 8.4 Bisimulación P.H. Para Redes n-Seguras

Nuestro objetivo en esta sección es extender los resultados de las anteriores a redes n-seguras. En efecto, es posible demostrar que la bisimulación preservando historias sigue siendo decidible para redes n-seguras. Para ello vamos a seguir una argumentación similar a la utilizada en la sección anterior. Comenzaremos por tanto probando la decidibilidad con la semántica de secuencias de ocurrencia, para después extender el resultado a la semántica de pasos.

En la siguiente definición extendemos el concepto de marcaje ordenado a redes n-seguras.

**Definición 8.25** Sea  $N = (S, T, F, M_0)$  una Red de Petri Ordinaria Marcada n-segura T-restringida.

1. Para cada  $s \in S$  se define el *conjunto de posibles tokens del lugar  $s$*  de la forma siguiente:

$$TOK_s = \{(i, s) \mid 1 \leq i \leq n\}$$

2. Se define el *conjunto de tokens de toda la red* de la forma siguiente:

$$TOK = \bigcup_{s \in S} TOK_s$$

3. Un *marcaje ordenado* de  $N$  es un par  $(\bar{M}, \leq)$ , donde  $\bar{M} \subseteq TOK$  verifica la restricción

$$\forall s \in S, ((i, s) \in \bar{M} \wedge j < i) \Rightarrow (j, s) \in \bar{M}$$

y  $\leq \subseteq TOK \times TOK$  es un preorden.

El conjunto de marcajes ordenados de  $N$  se denota por  $OM(N)$ .

Para cada  $s \in S$  definimos  $\bar{M}(s) = \{(i, s) \mid (i, s) \in \bar{M}\}$ . Además, decimos que  $(\bar{M}_1, \leq_1) = (\bar{M}_2, \leq_2)$ <sup>2</sup> si y sólo si para todo  $s \in S$  se tiene  $|\bar{M}_1(s)| = |\bar{M}_2(s)| = r_s$  y existe una biyección  $\chi_s : \{1, \dots, r_s\} \rightarrow \{1, \dots, r_s\}$  tal que:

$$\begin{aligned} \forall s, s' \in S, \forall i \in \{1, \dots, r_s\}, \forall j \in \{1, \dots, r_{s'}\} : \\ (i, s) \leq_1 (j, s') \text{ sii } (\chi_s(i), s) \leq_2 (\chi_{s'}(j), s') \end{aligned}$$

4. Dado un marcaje ordenado  $(\bar{M}, \leq)$  de  $N$ , se define el *marcaje asociado*  $M$  como sigue  $M(s) = |\bar{M}(s)|$ ,  $\forall s \in S$ .
5. Se define el *marcaje ordenado inicial* de la forma siguiente:

$$init(N) = (\bar{M}_0, \leq_0)$$

siendo  $\bar{M}_0(s) = \{(i, s) \mid 1 \leq i \leq M_0(s)\}$ , y  $\leq_0 \doteq \bar{M}_0 \times \bar{M}_0$ . Es inmediato comprobar que  $\leq_0$  es efectivamente un preorden, y que el marcaje asociado es  $M_0$ .

□

### Definición 8.26 (Evolución de Marcajes Ordenados)

Sea  $N = (S, T, F, M_0)$  una Red de Petri Ordinaria Marcada n-segura T-restringida,  $(\bar{M}, \leq)$  un marcaje ordenado suyo y  $t \in T$  una transición permitida bajo el marcaje asociado  $M$ , con  $M[t]M'$ . Definimos el marcaje ordenado asociado  $(\bar{M}', \leq')$  siguiendo los pasos siguientes:

<sup>2</sup>Utilizamos el símbolo "=" para denotar esta relación de equivalencia, por el hecho de que el nombre de los tokens, fuera de que se verifique la condición impuesta, no tiene ningún valor. No obstante, y como quiera que en la práctica tendremos que escoger en cada caso una cierta enumeración, no pasaremos a trabajar formalmente con el conjunto cociente inducido, sino que seguiremos hablando de los marcajes ordenados individuales.

1. Para cada  $s \in {}^\bullet t$  extraemos un token (elegido de forma arbitraria) del conjunto  $\bar{M}(s)$ .
2. Para cada  $s \in t^\bullet$  se añade un nuevo token  $x_s = (i, s)$  al lugar  $s$ , tal que  $(i, s) \notin \bar{M}(s)$ , definiéndose la relación  $\leq'$  como sigue:
  - (a) Si  $y, y' \in \bar{M}$ ,  $y \leq y'$ , y no han sido eliminados en el primer paso, entonces  $y \leq' y'$ .
  - (b) Si  $s, s' \in t^\bullet$ , entonces  $x_s \leq' x_{s'}$ , para los tokens  $x_s, x_{s'}$  añadidos por efecto del paso 2.
  - (c) Si  $y \in \bar{M}$ , es un token no eliminado por efecto del paso 1, pero existe  $y' \in \bar{M}$  tal que  $y \leq y'$ , con  $y'$  un token eliminado por efecto del paso 1, entonces  $y \leq' x_s$ , para cada token  $x_s$  añadido por efecto del paso 2.
3. En cada lugar en que sea necesario se renombran los tokens obtenidos para respetar la restricción impuesta sobre la numeración que los identifica en cada lugar.

Es inmediata la comprobación de que  $\leq'$  es efectivamente un preorden. Como de costumbre, denotaremos el paso en cuestión con la notación  $(\bar{M}, \leq)[t](\bar{M}', \leq')$ .

□

La definición anterior es no-determinista, pues existen varios posibles  $(\bar{M}', \leq')$  tales que  $(\bar{M}, \leq)[t](\bar{M}', \leq')$ , en función de los tokens elegidos en el paso 1.

Pasamos ahora a estudiar la evolución de las redes n-seguras basada en sus procesos.

**Definición 8.27** Sea  $N = (S, T, F, M_0)$  una Red de Petri Ordinaria Marcada T-restringida n-segura,  $\pi = (N', p)$  un proceso de  $N$  y  $(\bar{M}, \leq)$  un marcaje ordenado de  $N$ . Se dice que  $init(N)[\pi](\bar{M}, \leq)$  sii se cumplen las siguientes condiciones:

1.  $\forall s \in S, |p^{-1}(s) \cap \pi^\bullet| = M(s)$
2. Existe una biyección  $\varphi : \pi^\bullet \longrightarrow \bar{M}$  tal que  $\forall b \in \pi^\bullet : \varphi(b) \in \bar{M}(p(b))$ .
3.  $\forall b, b' \in \pi^\bullet, \varphi(b) \leq \varphi(b')$  sii ocurre una de las dos condiciones siguientes:

-  $b \in {}^\bullet \pi$ , ó bien

$$- b, b' \notin \bullet\pi \wedge \bullet b \leq_\pi \bullet b'$$

□

**Proposición 8.1** Sea  $N = (S, T, F, M_0)$  una Red de Petri Ordinaria Marcada T-restringida n-segura. Entonces se verifica  $init(N)[\pi_0(N)]init(N)$ .

**Demostración:** Veamos que se cumplen las condiciones de la definición 8.27.

1. Se verifica por definición de proceso, y por ser  $\pi_0(N)$  un proceso.
2. Basta tener en cuenta que para cada  $s \in S$  hemos considerado un conjunto de  $M_0(s)$  condiciones, por lo que a cada una se le puede asociar un token de forma unívoca en  $\bar{M}_0(s)$ .
3. Inmediata.

□

**Teorema 8.15** Sea  $N = (S, T, F, M_0)$  una Red de Petri Ordinaria Marcada T-restringida n-segura,  $(\bar{M}, \leq)$  y  $(\bar{M}', \leq')$  marcajes ordenados, y  $\pi = (N', p)$  un proceso tal que  $init(N)[\pi](\bar{M}, \leq)$ . Entonces  $(\bar{M}, \leq)[t](\bar{M}', \leq')$  sii existe un proceso  $\pi'$  tal que  $\pi \xrightarrow{t} \pi'$  e  $init(N)[\pi'](\bar{M}', \leq')$ .

**Demostración:** Veamos en primer lugar el sentido directo. Para cada  $s \in \bullet t$  tomamos  $\bar{M}(s) = \{x_1^s, \dots, x_{M(s)}^s\}$ , donde  $x_1^s$  es el token elegido para disparar  $t$ . Sabemos además que  $M(s) = |p^{-1}(s) \cap \pi^\bullet|$ , y que existe una biyección  $\varphi : \pi^\bullet \longrightarrow \bar{M}$  tal que  $\forall b \in \pi^\bullet, \varphi(b) \in \bar{M}(p(b))$ .

Sean entonces  $\{b_1^s, \dots, b_{M(s)}^s\}$  los lugares condición de  $\pi^\bullet$  asociados a  $s$ , y sea en particular  $\varphi^{-1}(x_1^s) = b_j^s$ , para un cierto  $j \in \{1, \dots, M(s)\}$ .

Extendemos entonces  $\pi$  a  $\pi'$  tomando para cada  $s \in \bullet t$  como lugar a extender el lugar  $b_j^s$  así obtenido. Hemos de demostrar entonces que  $init(N)[\pi'](\bar{M}', \leq')$ ; para ello iremos comprobando cada una de las condiciones de la definición 8.27.

1. Al proceso  $\pi$  le podemos asociar una secuencia de ocurrencia compatible con él, cuyo marcaje final es precisamente  $\bar{M}$ , debido a la condición (1) de  $init(N)[\pi](\bar{M}, \leq)$ . Como  $\pi'$  es una extensión de  $\pi$  realizada manteniendo la compatibilidad entre la secuencia de ocurrencia resultante y  $\pi'$ , concluimos por el teorema 8.1 que:

$$\forall s \in S, |p'^{-1}(s) \cap \pi'^\bullet| = M'(s)$$

2. Definimos  $\varphi' : \pi'^{\bullet} \longrightarrow \bar{M}'$  en la forma siguiente:

$$\varphi'(b) = \begin{cases} \varphi(b) & \text{si } b \in \pi^{\bullet} \\ x_s & \text{si } b \notin \pi^{\bullet}, b = \hat{b}_j^s, \text{ con } \hat{b}_j^s \text{ el lugar añadido para cada } s \in t^{\bullet} \end{cases}$$

Es inmediato comprobar que  $\varphi'$  es biyectiva y que  $\forall b \in B', \varphi'(b) \in \bar{M}'(p'(b))$ .

3. Supongamos en primer lugar que  $b, b' \in \pi'^{\bullet}$ , con  $\varphi'(b) \leq' \varphi'(b')$ . Entonces pueden darse los siguientes casos:

- $\varphi'(b)$  y  $\varphi'(b')$  son tokens relacionados por  $\leq$  no eliminados por el disparo de  $t$ . En tal caso  $\varphi'(b) = \varphi(b)$  y  $\varphi'(b') = \varphi(b')$ , y como además tenemos  $\text{init}(N)[\pi](\bar{M}, \leq)$ , obtenemos que  $\varphi(b) \leq \varphi(b')$  implica que  $b \in {}^{\bullet}\pi \vee (b, b' \notin {}^{\bullet}\pi \wedge {}^{\bullet}b \leq_{\pi} {}^{\bullet}b')$ , lo que se traslada inmediatamente a  $\pi'$ .
- $\varphi'(b), \varphi'(b')$  son tokens generados por el disparo de  $t$ . En tal caso  $\varphi'(b) = x_s$  y  $\varphi'(b') = x_{s'}$ , para ciertos lugares  $s, s' \in t^{\bullet}$ . Entonces es claro que  $b \notin {}^{\bullet}\pi'$ , pues  $b = \hat{b}_j^s$  para un cierto  $j$  y  $b' = \hat{b}_k^{s'}$  para un cierto  $k$ . Como estos tokens han sido producidos a la vez, ha de ocurrir que  ${}^{\bullet}\hat{b}_j^s = {}^{\bullet}\hat{b}_k^{s'} = \{e\}$ , con  $p'(e) = t$ . De ahí, por ser  $\leq_{\pi'}$  reflexiva, obtenemos  $e \leq_{\pi'} e$ .
- $\varphi'(b)$  es un token no eliminado por el disparo de  $t$ , y  $\varphi'(b')$  es un token generado por  $t$ , tales que  $\varphi'(b) \leq y'$ , para un token  $y'$  eliminado con el disparo de  $t$ . Entonces,  $\varphi'(b) = \varphi(b)$ , e  $y' = x_h^s$ , para un cierto  $s \in {}^{\bullet}t$  y un cierto  $h$ . Sea  $b'' = \varphi^{-1}(y')$ . Tenemos que  $\varphi(b) \leq \varphi(b'')$ , e  $\text{init}(N)[\pi](\bar{M}, \leq)$ , de donde obtenemos que  $b \in {}^{\bullet}\pi$ , o bien  $b, b'' \notin {}^{\bullet}\pi, {}^{\bullet}b \leq_{\pi} {}^{\bullet}b''$ .

Si  $b \in {}^{\bullet}\pi$  entonces  $b \in {}^{\bullet}\pi'$ , con lo que ya acabaríamos. Si por el contrario,  $b, b'' \notin {}^{\bullet}\pi$ , entonces tenemos  $b, b' \notin {}^{\bullet}\pi'$ , pues  $b'$  no está en  ${}^{\bullet}\pi'$ . Como  $y'$  es eliminado por el disparo de  $t$ ,  $b'' \leq_{\pi'} b'$ , y por tanto, por transitividad,  ${}^{\bullet}b \leq_{\pi'} {}^{\bullet}b'$ , como queríamos demostrar.

Recíprocamente, supongamos en primer lugar que  $b \in {}^{\bullet}\pi'$ . Entonces para probar que  $\varphi'(b) \leq' \varphi'(b')$  hemos de considerar los siguientes casos posibles:

- Si  $b'$  no es un lugar condición producido por el disparo de  $t$ , entonces  $\varphi'(b') = \varphi(b')$ , y de ahí, aplicando que  $\text{init}(N)[\pi](\bar{M}, \leq)$ , obtenemos que  $\varphi(b) \leq \varphi(b')$ . En consecuencia,  $\varphi'(b) \leq' \varphi'(b')$ .

- Si  $b' = \hat{b}_j^s$ , para un cierto  $j$  y un cierto  $s \in t^*$ . Entonces sea  $b'' \in {}^{**}\hat{b}_j^s$ , que estará en  $\pi^*$ . Del hecho de que  $init(N)[\pi](\bar{M}, \leq)$ , obtenemos  $\varphi(b) \leq \varphi(b'')$ . De ahí, como  $\varphi(b'')$  es el token consumido por el disparo de  $t$ , por la definición de  $\leq'$  se concluye que  $\varphi'(b) \leq' \varphi'(b')$ .

Finalmente, supongamos que  $b, b' \notin {}^*\pi'$ ,  ${}^*b \leq'_\pi {}^*b'$ . En tal caso pueden presentarse los casos siguientes:

- Si  $\varphi'(b)$  y  $\varphi'(b')$  son ambos tokens generados por el disparo de  $t$ , entonces por la definición de  $\leq'$  concluimos:  $\varphi'(b) \leq' \varphi'(b')$ .
- Si  $\varphi'(b)$  y  $\varphi'(b')$  no son ninguno tokens generados por el disparo de  $t$ , entonces son tokens no consumidos, y  $b, b' \in \pi^*$ . De ahí,  $\varphi'(b) = \varphi(b)$ , y  $\varphi'(b') = \varphi(b')$ . Se concluye entonces que  $\varphi(b) \leq \varphi(b')$ , y de ahí, por la definición de  $\leq'$  (al ser tokens no consumidos)  $\varphi'(b) \leq' \varphi'(b')$ .
- Si  $\varphi'(b)$  es un token no consumido por el disparo de  $t$  y  $\varphi'(b')$  es un token consumido por el disparo de  $t$ , entonces  $\varphi'(b) = \varphi(b)$ , con  $b \in \pi^*$ . Entonces deben existir  $b_1, b_2$  tales que  $b_1 \in ({}^*b)^*$ ,  $b_2 \in {}^{**}b'$ ,  $b_1 \leq_\pi b_2$ . Entonces, como  $b$  y  $b_1$  fueron producidos a la vez, se tiene:  $\varphi(b) \leq \varphi(b_1)$ , por definición de  $\leq$ . Ahora bien,  ${}^*b_1 \leq_\pi {}^*b_2$ , y  $b_1, b_2 \in \pi^*$ , por lo que  $\varphi(b_1) \leq \varphi(b_2)$ . Como  $\leq$  es transitiva concluimos que  $\varphi(b) \leq \varphi(b_2)$ , y como  $b_2$  es consumido para generar  $b'$ , tenemos  $\varphi'(b) \leq' \varphi'(b')$ , por definición de  $\leq'$ .

Veamos el sentido inverso del enunciado del teorema. Supongamos que existe  $\pi'$  tal que  $\pi \xrightarrow{t} \pi'$  y  $init(N)[\pi'](\bar{M}', \leq')$ . Obtenemos en primer lugar  $M[t]M'$  de las propiedades de los procesos y por la condición (1) de la def. 8.27.

Para cada  $s \in {}^*t$  podemos elegir un token del conjunto  $\bar{M}(s)$ , pues  $M(s) \geq 1$ , lo que se obtiene de la condición (1) de la definición 8.27 teniendo en cuenta que la extensión de  $\pi$  a  $\pi'$  requiere para cada  $s \in {}^*t$  un lugar condición  $b(s)$  que esté en  $\pi^* \cap p^{-1}(s)$ . Elegimos en particular el token  $\varphi(b(s))$ , y lo extraemos del conjunto  $\bar{M}(s)$ .

En lo que a las postcondiciones hace referencia no hay problema alguno, pues basta añadir los tokens correspondientes. Sea entonces  $(\bar{M}', \leq'_1)$  el marcaje ordenado así obtenido, y veamos que  $\leq'_1$  coincide con  $\leq'$ .

Sea  $y \leq'_1 y'$ . Ello puede darse de alguna de las formas siguientes:

- $y \leq y'$ , con  $y, y'$  tokens no consumidos. Entonces se tiene

$$\varphi^{-1}(y) \in \bullet\pi \vee (\varphi^{-1}(y), \varphi^{-1}(y')) \notin \bullet\pi \wedge \bullet\varphi^{-1}(y) \leq_\pi \bullet\varphi^{-1}(y'))$$

Como todo ello sigue siendo cierto en  $\pi'$ , concluimos que  $y \leq' y'$ , por tenerse  $\text{init}(N)[\pi'](\bar{M}', \leq')$ .

- $y, y'$  son ambos generados por el disparo de  $t$ . Entonces hemos de tener en cuenta que el número de tokens generados por el disparo de  $t$  es igual al número de lugares añadidos al pasar de  $\pi$  a  $\pi'$ , por lo que se puede establecer una biyección entre ellos. En base a esta biyección podemos escoger los dos lugares condición asociados a  $y, y'$ , los cuales serán postcondición del mismo evento, y por tanto, de la condición (3) en la def. 8.27, concluimos  $y \leq' y'$ .
- $y$  es un token no consumido por el disparo de  $t$ , pero existe  $y''$  consumido por el disparo de  $t$  tal que  $y \leq y''$ , e  $y'$  es un token producido por  $t$ . Entonces tomamos para  $y'$  el lugar condición correspondiente en  $\pi''$  (obtenido según el razonamiento del caso anterior), y como  $y \leq y''$ , aplicamos la condición (3) correspondiente a la definición de  $\text{init}(N)[\pi](\bar{M}, \leq)$ , obteniéndose

$$\varphi^{-1}(y) \in \bullet\pi \vee (\varphi^{-1}(y), \varphi^{-1}(y'')) \notin \bullet\pi \wedge \bullet\varphi^{-1}(y) \leq_\pi \bullet\varphi^{-1}(y''))$$

Como  $y''$  es consumido por el disparo de  $t$ , tendremos  $\varphi^{-1}(y'') \leq_{\pi'} \varphi^{-1}(y')$ .

De ahí, por transitividad y por la condición (3) de la def. 8.27 se concluye  $y \leq' y'$ .

Como de costumbre, la demostración de que  $y \leq' y'$  implica  $y \leq'_1 y'$  es dual de la anterior.  $\square$

Del teorema anterior concluimos que la evolución de marcajes ordenados mediante disparos de transiciones es coherente con la evolución basada en procesos.

**Definición 8.28** (OM-bisimulación para Sistemas Etiquetados n-seguros)

Sea  $\Sigma$  un alfabeto finito y  $N_1 = (S_1, T_1, F_1, M_0^1, \lambda_1)$ ,  $N_2 = (S_2, T_2, F_2, M_0^2, \lambda_2)$  dos sistemas etiquetados sobre  $\Sigma$  n-seguros. Denotaremos por  $TOK_1$  y  $TOK_2$  los conjuntos de posibles tokens de  $N_1$  y  $N_2$  respectivamente. Una relación  $\mathcal{B} \subseteq OM(N_1) \times OM(N_2) \times \mathcal{P}(TOK_1 \times TOK_2)$  es una OM-bisimulación para  $N_1$  y  $N_2$  si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

1.  $(init(N_1), init(N_2), \bar{M}_0^1 \times \bar{M}_0^2) \in \mathcal{B}$
2. Si  $((\bar{M}_1, \leq_1), (\bar{M}_2, \leq_2), \beta) \in \mathcal{B}$ , y  $(\bar{M}_1, \leq_1)[t_1](\bar{M}'_1, \leq'_1)$ , entonces existe  $t_2 \in T_2$  y existe  $(\bar{M}'_2, \leq'_2)$ , tales que:
  - $\lambda_1(t_1) = \lambda_2(t_2)$ ,  $(\bar{M}_2, \leq_2)[t_2](\bar{M}'_2, \leq'_2)$ , y  $((\bar{M}'_1, \leq'_1), (\bar{M}'_2, \leq'_2), \beta') \in \mathcal{B}$ , para  $\beta'$  definido por:
 
$$\forall x_1 \in \bar{M}'_1, \forall x_2 \in \bar{M}'_2 : (x_1, x_2) \in \beta' \text{ sii}$$
    - (a)  $x_1$  y  $x_2$  son ambos tokens no consumidos por el disparo de  $t_1$  y  $t_2$  respectivamente y  $(x_1, x_2) \in \beta$ , o bien
    - (b)  $x_1$  y  $x_2$  son ambos tokens generados por el disparo de  $t_1$  y  $t_2$  respectivamente.
  - Para todo token  $x_1$  consumido por el disparo de  $t_1$  existe otro token  $x'_1$ , también consumido por  $t_1$ , y existe un token  $x'_2$  consumido por  $t_2$  tales que  $x_1 \leq_1 x'_1$ , y  $(x'_1, x'_2) \in \beta$ .
  - Para todo token  $x_2$  consumido por  $t_2$  existe otro token  $x'_2$ , también consumido por  $t_2$ , y existe un token  $x'_1$  consumido por  $t_1$  tales que:  $x_2 \leq_2 x'_2$ , y  $(x'_1, x'_2) \in \beta$ .
3. Análogamente a la condición (2), intercambiando los papeles entre  $N_1$  y  $N_2$ .

□

**Definición 8.29** Sea  $\Sigma$  un alfabeto finito,  $N_1 = (S_1, T_1, F_1, M_0^1, \lambda_1)$ ,  $N_2 = (S_2, T_2, F_2, M_0^2, \lambda_2)$  dos sistemas etiquetados sobre  $\Sigma$  n-seguros y  $\mathcal{B}$  una OM-bisimulación para  $N_1$  y  $N_2$ . Decimos que  $((\bar{M}'_1, \leq'_1), (\bar{M}'_2, \leq'_2), \beta') \in \mathcal{B}$  es alcanzable sii ocurre una de las dos condiciones siguientes:

- $((\bar{M}'_1, \leq'_1), (\bar{M}'_2, \leq'_2), \beta') = (init(N_1), init(N_2), \bar{M}_0^1 \times \bar{M}_0^2)$
- Existe un  $((\bar{M}_1, \leq_1), (\bar{M}_2, \leq_2), \beta) \in \mathcal{B}$  alcanzable y existen  $t_1 \in T_1$ ,  $t_2 \in T_2$  que satisfacen las propiedades de la condición 2 de la definición de OM-bisimulación.

□



**Proposición 8.2** Sea  $\Sigma$  un alfabeto finito y  $N_1 = (S_1, T_1, F_1, M_0^1, \lambda_1)$ ,  $N_2 = (S_2, T_2, F_2, M_0^2, \lambda_2)$  dos sistemas etiquetados sobre  $\Sigma$  n-seguros y sea  $\mathcal{B}$  una OM-bisimulación para ellos. Si  $((\bar{M}_1, \leq_1), (\bar{M}_2, \leq_2), \beta) \in \mathcal{B}$  es alcanzable, entonces para cualesquiera  $(x_1, x_2), (x'_1, x'_2) \in \beta$  se tiene  $x_1 \leq_1 x'_1$  si y sólo si  $x_2 \leq_2 x'_2$ .

**Demostración:** La haremos por inducción estructural respecto de la definición de ternas alcanzables. El caso base es trivial, ya que para  $(\bar{M}_1, \leq_1) = \text{init}(N_1)$ ,  $(\bar{M}_2, \leq_2) = \text{init}(N_2)$ , se tiene  $\beta = \bar{M}_0^1 \times \bar{M}_0^2$  (todos los tokens están relacionados entre sí).

En el caso general, supongamos que  $(x_1, x_2), (x'_1, x'_2) \in \beta'$ . Pueden presentarse los casos siguientes:

- Que  $(x_1, x_2) \in \beta, (x'_1, x'_2) \in \beta$ , es decir, que sean tokens no consumidos. En este caso, por hipótesis de inducción,  $x_1 \leq_1 x'_1$  sii  $x_2 \leq_2 x'_2$ , lo que se extiende a  $\leq'_1$  y  $\leq'_2$  de forma inmediata, por tratarse de tokens no consumidos.
- Que  $(x_1, x_2) \in \beta, (x'_1, x'_2) \notin \beta$ . En este caso,  $x_1$  y  $x_2$  son tokens no consumidos, mientras que  $x'_1$  y  $x'_2$  son tokens generados por el disparo de  $t_1$  y  $t_2$ , respectivamente. Supongamos que  $x_1 \leq'_1 x'_1$ , entonces por definición de  $\leq'_1$  existe  $x''_1$  consumido por  $t_1$  tal que  $x_1 \leq_1 x''_1$ , y por definición de  $\beta'$ , para  $x''_1$  existen  $x'''_1$  consumido por  $t_1$ , y  $x'''_2$  consumido por  $t_2$ , tales que  $x''_1 \leq_1 x'''_1$ , con  $(x'''_1, x'''_2) \in \beta$ . Como  $\leq_1$  es transitiva tenemos:  $x_1 \leq_1 x'''_1$ . Además sabemos que  $(x_1, x_2), (x'''_1, x'''_2) \in \beta$ , por lo que podemos aplicar la hipótesis de inducción, concluyendo que  $x_2 \leq_2 x'''_2$ . Y como quiera que  $x'''_2$  es un token consumido por  $t_2$ , concluimos que  $x_2 \leq'_2 x'_2$ .

El recíproco es dual.

- Que  $(x_1, x_2), (x'_1, x'_2) \notin \beta$ . En este caso todos los tokens en juego son generados por los disparos de  $t_1$  y  $t_2$ , por lo que  $x_1 \leq'_1 x'_1$  y  $x_2 \leq'_2 x'_2$  por definición de  $\leq'_1$  y  $\leq'_2$ .

□

**Teorema 8.16** Sea  $\Sigma$  un alfabeto finito y  $N_1 = (S_1, T_1, F_1, M_0^1, \lambda_1)$ ,  $N_2 = (S_2, T_2, F_2, M_0^2, \lambda_2)$  dos sistemas etiquetados sobre  $\Sigma$  n-seguros.  $N_1$  y  $N_2$  son bisimilares preservando historias si y sólo si son OM-bisimilares.

**Demostración:**

$\Rightarrow$ : Sea  $\mathcal{R}$  la bisimulación preservando historias entre  $N_1$  y  $N_2$ . Definimos la OM-bisimulación  $\mathcal{B}$  como sigue:

$$((\bar{M}_1, \leq_1), (\bar{M}_2, \leq_2), \beta) \in \mathcal{B} \text{ sii } \exists (\pi_1, \pi_2, f) \in \mathcal{R} \text{ tal que :}$$

1.  $init(N_i)[\pi_i](\bar{M}_i, \leq_i)$ , para  $i = 1, 2$ .
2.  $\forall x_1 \in \bar{M}_1(s_1), \forall x_2 \in \bar{M}_2(s_2)$  se tiene:

$$(x_1, x_2) \in \beta \text{ sii } (\varphi_1^{-1}(x_1) \in \bullet\pi_1 \wedge \varphi_2^{-1}(x_2) \in \bullet\pi_2) \vee (\bullet\varphi_1^{-1}(x_1) \neq \emptyset \wedge \bullet\varphi_2^{-1}(x_2) \neq \emptyset \wedge f(\bullet\varphi_1^{-1}(x_1)) = \bullet\varphi_2^{-1}(x_2)), \text{ siendo } \varphi_i \text{ la biyección entre } \pi_i^* \text{ y } \bar{M}_i, \text{ para } i = 1, 2.$$

Veamos que  $\mathcal{B}$  es efectivamente una OM-bisimulación.

En principio,  $(init(N_1), init(N_2), \bar{M}_0^1 \times \bar{M}_0^2) \in \mathcal{B}$ , pues en lo que respecta a la primera condición tenemos que  $init(N_i)[\pi_0(N_i)]init(N_i)$ , para  $i = 1, 2$ , y  $(\pi_0(N_1), \pi_0(N_2), \emptyset) \in \mathcal{R}$ . En lo que respecta a la segunda condición, ésta se obtiene sin más que tener en cuenta que todos los tokens están relacionados entre sí, y sus lugares asociados están en  $\bullet\pi_1$  y  $\bullet\pi_2$  respectivamente.

Supongamos entonces que  $((\bar{M}_1, \leq_1), (\bar{M}_2, \leq_2), \beta) \in \mathcal{B}$ , y que  $(\bar{M}_1, \leq_1)[t_1](\bar{M}'_1, \leq'_1)$ . Entonces existe  $(\pi_1, \pi_2, f) \in \mathcal{R}$  que cumple las condiciones indicadas. En particular:

$$init(N_i)[\pi_i](\bar{M}_i, \leq_i) \text{ para } i = 1, 2$$

El hecho de que  $t_1$  sea disparable bajo  $M_1$  nos permite concluir que podemos extender  $\pi_1$  mediante  $t_1$ . Es decir, existe un  $\pi'_1$  tal que  $\pi_1 \xrightarrow{t_1} \pi'_1$ . Podemos elegir el  $\pi'_1$  de forma que los lugares en los que “enganchamos” el nuevo evento estén relacionados con los tokens elegidos en la evolución de los marcajes ordenados. De ahí, como  $\mathcal{R}$  es una bisimulación preservando historias existen  $t_2 \in T_2$ ,  $\pi'_2$ ,  $f'$  tales que  $\pi_2 \xrightarrow{t_2} \pi'_2$ , con  $(\pi'_1, \pi'_2, f') \in \mathcal{R}$ , y  $f'|_{ev(\pi_1)} = f$ .

Con  $t_2$  podemos extender  $\pi_2$ , por lo que también podemos extender  $(\bar{M}_2, \leq_2)$ . La extensión de  $(\bar{M}_2, \leq_2)$  debe hacerse además eligiendo los tokens relacionados con los lugares condición en los que se ha “enganchado” el nuevo evento en  $\pi_2$ . Así obtenemos:  $(\bar{M}_2, \leq_2)[t_2](\bar{M}'_2, \leq'_2)$ .

Además, se tiene:  $\lambda_1(t_1) = \lambda_2(t_2)$ , pues  $f'$  es un isomorfismo y  $f'_{ev(\pi_1)} = f$ .

Sea ahora  $x_1$  un token consumido por  $t_1$  y sea  $b_1 = \varphi_1^{-1}(x_1)$ . Pueden ocurrir dos casos:

1. Si  $\nexists \tilde{e}_1 \in ev(\pi_1)$  tal que  $\tilde{e}_1 \leq_1 e_1$ , siendo  $e_1$  el evento asociado a la transición  $t_1$ , entonces  $\bullet b_1 = \emptyset$ ; de ahí, como  $f'$  es un isomorfismo,  $\nexists \tilde{e}_2 \in ev(\pi_2)$  tal que  $\tilde{e}_2 \leq_2 e_2$ . Así pues,  $\exists b_2 \in \bullet e_2$  tal que  $\bullet b_2 = \emptyset$ . De ahí,  $x_2 = \varphi_2(b_2)$  es un token consumido por  $t_2$  y como  $b_1 \in \bullet \pi_1$ ,  $b_2 \in \bullet \pi_2$  tenemos que  $(x_1, x_2) \in \beta$ , pues  $((\bar{M}_1, \leq_1), (\bar{M}_2, \leq_2), \beta) \in \mathcal{B}$ .
2. En caso contrario podemos distinguir dos subcasos:

- (a)  $\bullet b_1 = \emptyset$ . Sabemos que tenemos un  $\tilde{e}_1 \in ev(\pi_1)$  tal que  $\tilde{e}_1 \in \bullet e_1$ , y como  $f'$  es un isomorfismo  $\exists \tilde{e}_2 \in ev(\pi_2)$  tal que  $f(\tilde{e}_1) = \tilde{e}_2$ ,  $\tilde{e}_2 \in \bullet e_2$ . Sea entonces  $\tilde{b}_1 \in \tilde{e}_1^* \cup \bullet e_1$  y sea  $\tilde{b}_2 \in \tilde{e}_2^* \cup \bullet e_2$ . Sea  $\tilde{x}_1 = \varphi_1(\tilde{b}_1)$ , que existe pues  $\tilde{b}_1 \in \pi_1^*$ , y  $\tilde{x}_2 = \varphi_2(\tilde{b}_2)$ , que también existe, pues  $\tilde{b}_2 \in \pi_2^*$ . Además,  $f(\bullet \tilde{b}_1) = f(\bullet \varphi_1^{-1}(\tilde{x}_1)) = f(\tilde{e}_1) = \tilde{e}_2$ . En definitiva tenemos  $\tilde{x}_1$ ,  $\tilde{x}_2$  que cumplen:

$$\bullet \varphi_1^{-1}(\tilde{x}_1) \neq \emptyset \wedge \bullet \varphi_2^{-1}(\tilde{x}_2) \neq \emptyset \wedge f(\bullet \varphi_1^{-1}(\tilde{x}_1)) = \bullet \varphi_2^{-1}(\tilde{x}_2)$$

En consecuencia:  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \beta$ . Además, como  $b_1 \in \bullet \pi_1$ ,  $b_1 \in \pi_1^*$ ,  $\tilde{b}_1 \in \pi_1^*$ , por definición de  $\leq_1$  se tiene  $\varphi_1(b_1) \leq_1 \varphi_1(\tilde{b}_1)$ , es decir,  $x_1 \leq_1 \tilde{x}_1$ .

- (b) Si  $\bullet b_1 \neq \emptyset$ , podemos considerar un evento  $\tilde{e}_1 \in \bullet b_1$ . Como  $\tilde{e}_1 \leq_1 e_1$ ,  $\exists \tilde{e}_2 \in ev(\pi_2)$  tal que  $\tilde{e}_2 \leq_2 e_2$  y  $f(\tilde{e}_1) = \tilde{e}_2$ . Sea  $\tilde{b}_2 \in \bullet e_2 \cup \tilde{e}_2^*$ . Entonces tenemos  $\tilde{x}_2 = \varphi_2(\tilde{b}_2)$ , que está definido pues  $\tilde{b}_2 \in \pi_2^*$ . Además, tenemos

$$\begin{aligned} \bullet \varphi_1^{-1}(x_1) &= \bullet b_1 \neq \emptyset \\ \bullet \varphi_2^{-1}(\tilde{x}_2) &= \bullet \tilde{b}_2 \neq \emptyset \\ f(\bullet \varphi_1^{-1}(x_1)) &= f(\tilde{e}_1) = \tilde{e}_2 = \bullet \varphi_2^{-1}(\tilde{x}_2) \end{aligned}$$

En consecuencia:  $(x_1, \tilde{x}_2) \in \beta$ , y además,  $x_1 \leq_1 \tilde{x}_1$ .

Para los tokens consumidos por  $t_2$  se razona igual.

Queda únicamente por probar que  $((\bar{M}'_1, \leq'_1), (\bar{M}'_2, \leq'_2), \beta') \in \mathcal{B}$ . En principio, por el teorema 8.15 tenemos  $init(N_1)[\pi'_1](\bar{M}'_1, \leq'_1)$  e  $init(N_2)[\pi'_2](\bar{M}'_2, \leq'_2)$ . Sean entonces  $x_1 \in \bar{M}'_1(s_1)$ ,  $x_2 \in \bar{M}'_2(s_2)$ , y supongamos que  $(x_1, x_2) \in \beta'$ . Pueden ocurrir 2 casos:

- Si  $(x_1, x_2) \in \beta$ , entonces son tokens no consumidos y por definición de  $\mathcal{B}$ , como tenemos que  $((\bar{M}_1, \leq_1), (\bar{M}_2, \leq_2), \beta) \in \mathcal{B}$ , se verifica  $(x_1, x_2) \in \beta \Leftrightarrow (\varphi_1^{-1}(x_1) \in \bullet\pi_1 \wedge \varphi_2^{-1}(x_2) \in \bullet\pi_2) \vee (\bullet\varphi_1^{-1}(x_1) \neq \emptyset \wedge \bullet\varphi_2^{-1}(x_2) \neq \emptyset \wedge f(\bullet\varphi_1^{-1}(x_1)) = \bullet\varphi_2^{-1}(x_2))$ , lo que se extiende a  $\varphi'_1, \varphi'_2, \pi'_1, \pi'_2$  de forma inmediata.
- Si son tokens generados por el disparo de  $t_1$  y  $t_2$  respectivamente, entonces es claro que  $\bullet\varphi'^{-1}_1(x_1) \neq \emptyset$  y  $\bullet\varphi'^{-1}_2(x_2) \neq \emptyset$ . Sean entonces  $b_1, b_2$  y  $e_1$  tales que  $\varphi'_1(b_1) = x_1, \varphi'_2(b_2) = x_2, e_1 = \bullet\varphi'^{-1}_1(x_1)$  y sea  $e_2 = f'(e_1)$ .  
Entonces,  $f'(\bullet\varphi'^{-1}_1(x_1)) = \bullet\varphi'^{-1}_2(x_2)$ .

El recíproco se obtiene teniendo en cuenta que  $b_1$  y  $b_2$  corresponden a tokens generados por  $t_1$  y  $t_2$  respectivamente, por lo que están relacionados por  $\beta'$ .

$\Leftarrow$ : Supongamos ahora que existe una OM-bisimulación  $\mathcal{B}$  para  $N_1$  y  $N_2$ . Vamos a definir la bisimulación preservando historias  $\mathcal{R}$  a la vez que una función  $o : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{B})$  que las relaciona.

- En primer lugar tomamos  $(\pi_0(N_1), \pi_0(N_2), \emptyset) \in \mathcal{R}$ , y  $o(\pi_0(N_1), \pi_0(N_2), \emptyset) = \{(init(N_1), init(N_2), \bar{M}_0^1 \times \bar{M}_0^2)\}$
- Si  $(\pi_1, \pi_2, f) \in \mathcal{R}$  y  $((\bar{M}_1, \leq_1), (\bar{M}_2, \leq_2), \beta) \in o(\pi_1, \pi_2, f)$ , con  $(\bar{M}_1, \leq_1), (\bar{M}_2, \leq_2), (\bar{M}'_1, \leq'_1), (\bar{M}'_2, \leq'_2), \beta, \beta', t_1$  y  $t_2$  satisfaciendo las condiciones de OM-bisimulación. Entonces, por el teorema 8.15 obtenemos procesos  $\pi'_1, \pi'_2$  tales que  $init(N_1)[\pi'_1](\bar{M}'_1, \leq'_1), init(N_2)[\pi'_2](\bar{M}'_2, \leq'_2)$ , con  $\pi_1 \xrightarrow{t_1} \pi'_1, \pi_2 \xrightarrow{t_2} \pi'_2$ .  
Definimos entonces  $f'$  mediante  $f'|_{ev(\pi_1)} = f$  y  $f'(e_1) = e_2$ , siendo  $e_1$  el evento asociado a  $t_1$  y  $e_2$  el evento asociado a  $t_2$ , e imponemos  $(\pi'_1, \pi'_2, f') \in \mathcal{R}, ((\bar{M}'_1, \leq'_1), (\bar{M}'_2, \leq'_2), \beta') \in o(\pi'_1, \pi'_2, f')$ .

Para poder aplicar el teorema 8.15 se requieren dos hechos de fácil prueba:

- $\forall (\pi_1, \pi_2, f) \in \mathcal{R}$  se tiene  $o(\pi_1, \pi_2, f) \neq \emptyset$
- Si  $(\pi_1, \pi_2, f) \in \mathcal{R}$ , entonces  $((\bar{M}_1, \leq_1), (\bar{M}_2, \leq_2), \beta) \in o(\pi_1, \pi_2, f)$  implica  $init(N_1)[\pi_1](\bar{M}_1, \leq_1), init(N_2)[\pi_2](\bar{M}_2, \leq_2)$ .

Por otra parte, se cumple también de manera inmediata el siguiente hecho relacionado, que será necesario más adelante:

- Si  $(\pi_1, \pi_2, f) \in \mathcal{R}$ ,  $((\bar{M}_1, \leq_1), (\bar{M}_2, \leq_2), \beta) \in o(\pi_1, \pi_2, f)$ , y  $b_1 \in \pi_1^\bullet$ ,  $b_2 \in \pi_2^\bullet$  son tales que  $(\varphi_1(b_1), \varphi_2(b_2)) \in \beta$ , entonces:

$$\bullet b_1 \neq \emptyset \Rightarrow f(\bullet b_1) = \bullet b_2$$

$$\bullet b_2 \neq \emptyset \Rightarrow f(\bullet b_2) = \bullet b_1$$

Queda por ver que la función  $f'$  arriba definida es un isomorfismo entre  $ev(\pi'_1)$  y  $ev(\pi'_2)$ . Para ello, como sabemos que  $f$  es un isomorfismo entre  $ev(\pi_1)$  y  $ev(\pi_2)$ , y  $f'$  extiende a  $f$ , basta chequear las dos condiciones siguientes:

- Si  $e'_1$  es un predecesor inmediato de  $e_1$  (evento asociado a  $t_1$ ) en  $ev(\pi'_1)$ , entonces  $f(e'_1)$  es un predecesor de  $e_2$  (evento asociado a  $t_2$ ) en  $ev(\pi'_2)$ .

Para demostrarlo consideremos el  $e'_1$  dado; para él existe un  $b_1 \in \bullet e_1 \cap e'_1$ . Sean entonces  $s_1 = p_1(b_1) \in \bullet t_1$  y  $x_1 = \varphi_1(b_1)$ . Por definición de OM-bisimulación existen  $x'_1$  y  $x'_2$  consumidos por  $t_1$  y  $t_2$  respectivamente, tales que  $x_1 \leq_1 x'_1$ ,  $(x'_1, x'_2) \in \beta$ .

Sean entonces  $b'_1 = \varphi_1^{-1}(x'_1)$ ,  $b'_2 = \varphi_2^{-1}(x'_2)$ . Se tiene  $\bullet b_1 \leq_{\pi_1} \bullet b'_1$  por ser  $init(N_1)[\pi_1](\bar{M}_1, \leq_1)$ , y de ahí, aplicando el tercer hecho indicado obtenemos  $f(\bullet b'_1) = \bullet b'_2$ . Además,  $b'_2 = e_2$ , y de ahí,  $f(e'_1) = f(\bullet b_1) \leq_{\pi_2} f(\bullet b'_1) = \bullet b'_2 \leq_{\pi_2} e_2$ .

- Si  $e'_2$  es un predecesor inmediato de  $e_2$  en  $ev(\pi'_2)$ , entonces  $f^{-1}(e'_2)$  es un predecesor de  $e_1$  en  $ev(\pi'_1)$ .

Inmediata, pues es la dual de la anterior.

□

**Corolario 8.3** Sea  $\Sigma$  un alfabeto finito. Dados dos sistemas etiquetados sobre  $\Sigma$  n-seguros, es decidible si son bisimilares preservando historias. □

A continuación extendemos este resultado a la semántica de pasos en sistemas etiquetados n-seguros.

**Teorema 8.17** Sea  $\Sigma$  un alfabeto finito y  $N_1 = (S_1, T_1, F_1, M_0^1, \lambda_1)$ ,  $N_2 = (S_2, T_2, F_2, M_0^2, \lambda_2)$  dos sistemas etiquetados sobre  $\Sigma$  n-seguros.  $N_1$  y  $N_2$  son bisimilares preservando historias con la semántica de pasos si y sólo si son bisimilares preservando historias con la semántica de secuencias de ocurrencia.

**Demostración:**

$\Rightarrow$ : Inmediata.

$\Leftarrow$ : Sea  $\mathcal{R}$  la bisimulación preservando historias para la semántica de secuencias de ocurrencia. Veamos que es también una bisimulación preservando historias para la semántica de pasos. Para ello sólo hemos de ver que si  $\pi_1 \xrightarrow{R_1} \pi'_1$ , con  $(\pi_1, \pi_2, f) \in \mathcal{R}$  y secuencializamos el disparo de  $R_1$  obteniendo

$$\pi_1 \xrightarrow{t_{1,1}} \pi_{1,1} \xrightarrow{t_{1,2}} \pi_{1,2} \dots \xrightarrow{t_{1,n}} \pi'_1$$

y consideramos que para cada  $t_{1,j}$  existen un  $t_{2,j} \in T_2$ , un isomorfismo  $f_j$  entre las estructuras de eventos  $ev(\pi_{1,j})$  y  $ev(\pi_{2,j})$ , y un proceso de  $N_2$ ,  $\pi_{2,j}$ , tales que:

$$\pi_2 \xrightarrow{t_{2,1}} \pi_{2,1} \xrightarrow{t_{2,2}} \pi_{2,2} \dots \xrightarrow{t_{2,n}} \pi'_2$$

entonces las  $t_{2,j}$  pueden dispararse en un solo paso.

Para ello sea  $e_{1,i}$  el evento asociado a la transición  $t_{1,i}$  en  $\pi_{1,i}$ , y  $e_{2,j}$  el evento asociado a  $t_{2,j}$  en  $\pi_{2,j}$ .

Podemos encontrar  $(\bar{M}_1, \leq_1)$ ,  $(\bar{M}_2, \leq_2)$  tales que:

$$init(N_1)[\pi_1](\bar{M}_1, \leq_1), init(N_2)[\pi_2](\bar{M}_2, \leq_2)$$

y por tanto existen dos biyecciones  $\varphi_1 : \pi_1^* \rightarrow \bar{M}_1$ ,  $\varphi_2 : \pi_2^* \rightarrow \bar{M}_2$ .

Aunque lo vemos sólo para 2 transiciones, el razonamiento se generaliza sin mayores problemas a conjuntos arbitrarios de ellas. Por tanto, supongamos que existe  $i$  tal que existe  $j$ ,  $i < j$ , de modo que  $t_{2,i}$  y  $t_{2,j}$  son dos transiciones (quizás idénticas) que no pueden ser disparadas a la vez, y además  $j$  es el menor para el que esto ocurre. Entonces existe algún lugar  $s \in {}^*t_{2,i} \cap {}^*t_{2,j}$  que no dispone de suficientes tokens para disparar simultáneamente ambas transiciones. Sea entonces  $b_i(s)$  el lugar que corresponde (mediante  $\varphi_2$ ) al token de  $s$  consumido por  $t_{2,i}$  y  $b_j(s)$  el que corresponde al token consumido por  $t_{2,j}$ . La ocurrencia del evento  $e_{2,j}$  requiere que el lugar  $s$  recupere el token perdido por el disparo de  $t_{2,i}$ , lo que implica:  $e_{2,i} <_{\pi_{2,j}} e_{2,j}$ . De ahí, como  $f_j$  es un isomorfismo concluimos que  $e_{1,i} <_{\pi_{1,j}} e_{1,j}$ , lo que es absurdo.  $\square$



## Capítulo 9

# Bisimulación P.H. en Redes Temporizadas

### 9.1 Procesos Temporizados

En esta sección vamos a definir sobre Redes de Petri Temporizadas el concepto de proceso temporizado, como una extensión natural del concepto de proceso. La diferencia fundamental respecto al concepto clásico (ver sección 1 del capítulo anterior) consiste en que ahora asociamos a los lugares condición un número natural que representa el tiempo que queda para que el token asociado a dicho lugar esté disponible. Consideraremos únicamente redes ordinarias, es decir, redes con peso 1, si bien todos los conceptos introducidos pueden ser extendidos sin problemas a redes generalizadas.

#### Definición 9.1 (Procesos Temporizados)

Sea  $N = (S, T, F, \delta, M_0)$  una Red de Petri Ordinaria Temporizada Marcada T-restrictiva. Un proceso de  $N$  es un par  $\pi = (N', p)$ , con  $N' = (B, E, W, \Delta)$ , donde  $(B, E, W)$  es una red de ocurrencia,  $\Delta : B \longrightarrow \mathbb{N}$ ,  $p : B \cup E \longrightarrow S \cup T$ , de modo que:

1.  $\text{Min}(N')$  es un  $B$ -corte de  $N'$ .
2.  $p(B) \subseteq S$ ,  $p(E) \subseteq T$
3.  $\forall s \in S, \forall e \in E \ F(s, p(e)) = |p^{-1}(s) \cap \bullet e|$ ,  $F(p(e), s) = |p^{-1}(s) \cap e \bullet|$



4.  $\forall s \in S, M_0^1(s) = |p^{-1}(s) \cap \text{Min}(N')|$ , siendo  $M_0 = (M_0^1, \emptyset)$
5.  $\forall b, (b \notin \text{Max}(N') \vee b \in \text{Min}(N') \cap \text{Max}(N')) \Rightarrow \Delta(b) = 0$
6.  $\forall b \in \text{Max}(N'), \Delta(b) \in \{0, \dots, \delta(p(\bullet b)) - 1\}$
7.  $\forall e \in E, \forall b_1, b_2 \in e^\bullet, \Delta(b_1) = \Delta(b_2)$

□

Las cuatro primeras condiciones son las usuales, y por tanto, no requieren mayor comentario. Con la condición 5 obligamos a que el número entero asociado a los lugares no maximales sea nulo, pues si el token asociado se ha consumido es porque antes ya estaba disponible. Lo mismo imponemos a los lugares correspondientes a los tokens del marcaje inicial.

Por su parte, la condición 6 indica que cada lugar maximal no minimal tendrá un número entero asociado menor que la duración de la transición que generó el token asociado al lugar.

Finalmente, la última condición indica que todos los tokens producidos por el disparo de una transición han de tener asociado el mismo tiempo.

**Ejemplo 9.1** Consideremos la Red de Petri Temporalizada Marcada  $N = (S, T, F, \delta, M_0)$  siguiente (ver figura 42):

$$\begin{aligned}
 S &= \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\} \\
 T &= \{t_1, t_2, t_3\} \\
 F &= \{(s_1, t_1), (s_1, t_3), (s_2, t_2), (s_2, t_1), (s_4, t_1), (s_5, t_3), \\
 &\quad (t_1, s_5), (t_2, s_2), (t_2, s_3), (t_2, s_4), (t_3, s_2), (t_3, s_4)\} \\
 \delta(t) &= \begin{cases} 2 & \text{si } t = t_1 \vee t_2 \\ 3 & \text{si } t = t_3 \end{cases} \\
 M_0^1(s) &= \begin{cases} 2 & \text{si } s = s_1 \vee s = s_2 \\ 1 & \text{si } s = s_4 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}
 \end{aligned}$$

y la red de ocurrencia  $N' = (B, E, W)$  dada por (ver figura 43)

$$\begin{aligned} B &= \{b_{1,1}, b_{1,2}, b_{2,1}, b_{2,2}, b_{4,1}, b_{4,2}, b_{2,3}, b_{5,1}, b_{5,2}\} \\ E &= \{e_{2,1}, e_{1,2}, e_{1,1}\} \\ W &= \{(b_{2,1}, e_{2,1}), (b_{1,1}, e_{1,2}), (b_{1,2}, e_{1,1}), (b_{2,2}, e_{1,1}), \\ &\quad (b_{4,1}, e_{1,1}), (e_{2,1}, b_{4,2}), (e_{2,1}, b_{2,3}), (b_{4,2}, e_{1,2}), \\ &\quad (b_{2,3}, e_{1,2}), (e_{1,2}, b_{5,1}), (e_{1,1}, b_{5,2})\} \end{aligned}$$

Entonces,  $((B, E, W, \Delta), p)$  es un proceso temporizado de  $N$ , siendo  $\Delta$  y  $p$  definidos como sigue:

$$\Delta(b) = \begin{cases} 1 & \text{si } b = b_{5,1} \vee b = b_{5,2} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$p(b_{i,j}) = s_i, \quad p(e_{i,j}) = t_i$$

En la figura 43 se ha representado gráficamente la función  $\Delta$  en forma de anotaciones enteras bajo cada lugar.  $\square$

Veamos cómo podemos relacionar los procesos temporizados con las secuencias de pasos temporizadas.

**Definición 9.2** (Compatibilidad de Procesos Temporizados con Secuencias de Pasos Temporizadas) Sea  $N = (S, T, F, \delta, M_0)$  una Red en las condiciones de la definición 9.1,  $\pi = (N', p)$  un proceso temporizado de  $N$  y  $\sigma = M_0[R_1]M_1 \dots [R_n]M_n$  una secuencia de pasos temporizada de  $N$ . Se dice que  $\sigma$  y  $\pi$  son *compatibles* sii existe una función  $pos : E \longrightarrow \{1, \dots, n\}$ , tal que

1.  $\forall t \in T, \forall i \in \{1, \dots, n\}, |pos^{-1}(i) \cap p^{-1}(t)| = R_i(t)$
2.  $\forall e, e' \in E, e < e' \Rightarrow pos(e) < pos(e') \wedge pos(e') - pos(e) \geq \delta(p(e))$
3.  $\forall t \in T, \forall \alpha \in \mathbb{N}^+, M_n^2(t, \alpha) = |E(t, \alpha)|$ , siendo  $M_n = (M_n^1, M_n^2)$  y  
 $E(t, \alpha) = \{e \in E \mid p(e) = t \wedge (b \in e^\bullet \Rightarrow (b \in Max(N') \wedge \Delta(b) = \alpha))\}$

$\square$

La primera condición y la primera parte de la segunda no sufren cambios con respecto del concepto de compatibilidad para redes no temporizadas. En la segunda parte de la segunda condición se refleja el efecto de las duraciones de las

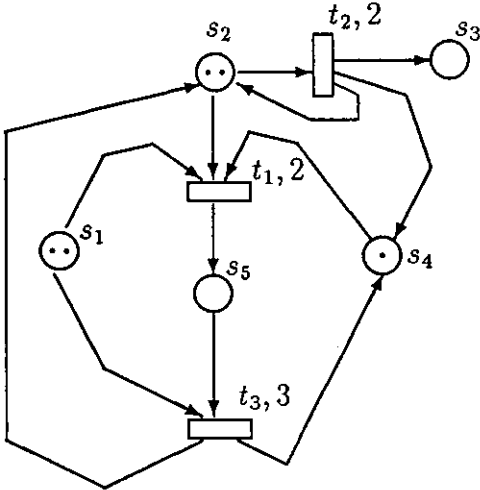


Figura 42: Red de Petri TempORIZADA  $N$

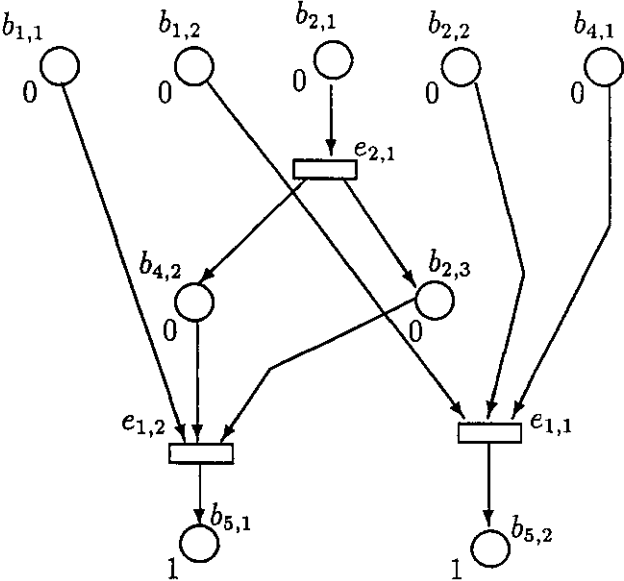


Figura 43: Un Proceso TempORIZADO de  $N$

transiciones mediante una relación entre las posiciones de los eventos. La tercera condición relaciona la segunda componente del marcaje final con la función  $\Delta$  (ambas expresan un mismo significado, que no es otro que el tiempo que le queda a la transición en cuestión para terminar, si bien, la función  $\Delta$  lo hace de forma indirecta, sobre los lugares condición asociados a los tokens producidos por la transición).

No exigimos que la función  $pos$  sea suprayectiva debido a la posible presencia de pasos vacíos. Para completar la notación definimos  $\bullet\emptyset = \emptyset\bullet = \emptyset$ .

**Teorema 9.1** Sea  $N$  una red en las condiciones de la definición 9.1,  $\pi = (N', p)$  un proceso de  $N$  y  $\sigma$  una secuencia de pasos temporizada compatible con  $\pi$  mediante una función  $pos$ . Se definen de forma recurrente:

$$\begin{aligned} c_0 &= Min(N') \\ c_i &= (c_{i-1} - \bullet pos^{-1}(i)) \cup pos^{-1}(i)\bullet \end{aligned}$$

Entonces se tiene:

1.  $c_i$  es un  $B$ -corte de  $N'$
2.  $\forall i \in \{0, \dots, n\}, [Min(N'), c_i] \cap E = \bigcup_{j \leq i} pos^{-1}(j)$
3.  $\bullet pos^{-1}(i+1) \subseteq c_i, \forall i \in \{0, \dots, n\}$
4.  $B = \bigcup_{i \in \{0, \dots, n\}} c_i$

**Demostración:** No difiere excesivamente de la correspondiente al caso no temporizado, si bien ahora aparece una ligera complicación al poder haber pasos vacíos. Comenzamos demostrando simultáneamente por inducción las tres primeras propiedades.

**CASO BASE:**

La primera y la segunda propiedades son inmediatas, pues  $c_0 = Min(N')$  y  $pos^{-1}(0) = \emptyset$ . Veamos entonces que  $\bullet pos^{-1}(1) \subseteq c_0$ . Si  $pos^{-1}(1)$  es vacío, es inmediato. En caso contrario, sea  $b \in \bullet pos^{-1}(1)$  y supongamos que  $b \notin c_0$ . Entonces existirá un cierto  $e \in \bullet b$ . Además, como  $b \in \bullet pos^{-1}(1)$ , existe  $e' \in pos^{-1}(1)$  tal que  $b \in \bullet e'$ . Por tanto,  $e < e'$ , y de ahí, por la condición 2 de compatibilidad,

$pos(e) < pos(e')$ . Como  $pos(e') = 1$  llegamos al absurdo de que  $pos(e) = 0$ . Por tanto,  $\bullet pos^{-1}(1) \subseteq c_0$ .

### CASO GENERAL:

Suponemos que las tres primeras propiedades son válidas hasta el paso  $i - 1$ . Si el paso  $i$  es vacío  $c_i = c_{i-1}$  y todo se mantiene como hasta el paso  $i - 1$ , por lo que basta aplicar la hipótesis de inducción. Supongamos entonces que  $pos^{-1}(i) \neq \emptyset$ . En principio es claro que  $c_i \subseteq B$ . Veamos que  $E \cap [Min(N'), c_i] = \bigcup_{j \leq i} pos^{-1}(j)$ . Sea  $e_i \in pos^{-1}(i)$ , entonces existe un cierto  $b \in \bullet e_i$ , y por la hipótesis de inducción  $\bullet pos^{-1}(i) \subseteq c_{i-1}$ . Por tanto,  $b \in c_{i-1}$ , y de ahí,  $e_i \in E \cap [Min(N'), c_i]$ . Por la hipótesis de inducción tenemos que para  $j < i$ ,  $pos^{-1}(j) \subseteq [Min(N'), c_{i-1}] \cap E$ , por lo que  $\bigcup_{j \leq i} pos^{-1}(j) \subseteq E \cap [Min(N'), c_i]$ . La otra inclusión es inmediata, teniendo en cuenta la definición de  $c_i$  y la hipótesis de inducción.

Veamos ahora que  $c_i$  es una anticadena maximal. Para ver que es anticadena consideremos  $b_1, b_2 \in c_i$ . Pueden darse los casos siguientes:

- $b_1, b_2 \in c_{i-1}$ . En este caso basta aplicar la hipótesis de inducción para obtener  $b_1$  co  $b_2$ .
- $b_1 \notin c_{i-1}, b_2 \in c_{i-1}$ . En este caso existe un cierto  $e_i \in pos^{-1}(i)$  tal que  $b_1 \in e_i^*$ , con lo cual  $b_2 \notin e_i^*$ , ya que en caso contrario podríamos encontrar un  $b_3 \in \bullet e_i$  que cumpla  $b_3 \in c_{i-1}$  (pues  $\bullet pos^{-1}(i) \subseteq c_{i-1}$ ), por lo que tendríamos  $b_3 < b_2$ , lo que es absurdo, pues  $c_{i-1}$  es un  $B$ -corte por la hipótesis de inducción.

Entonces  $b_1 \in e_i^*, b_2 \notin e_i^*$ . Además, como  $b_2 \in c_i$ , tenemos que  $b_2 \notin \bullet e_i$ . Supongamos entonces (por reducción al absurdo) que  $b_2 < b_1$  ó  $b_1 < b_2$ .

Si  $b_2 < b_1$ , tomamos un  $b_3 \in \bullet e_i$  tal que  $b_2 < b_3$ , que en efecto existe por ser  $b_2 \notin \bullet e_i$ . Entonces  $b_3 \in c_{i-1}$ , ya que  $\bullet pos^{-1}(i) \subseteq c_{i-1}$ , lo que contradice el hecho de que  $c_{i-1}$  sea un  $B$ -corte, pues  $b_2$  también pertenece a  $c_{i-1}$  y  $b_2 < b_3$ .

Si  $b_1 < b_2$ , consideramos un  $b_3 \in \bullet e_i$ . Entonces  $b_3 \in c_{i-1}$ , lo que nuevamente es absurdo, pues  $b_3 < b_2$ .

En consecuencia  $b_1$  co  $b_2$ .

- Si  $b_1, b_2 \notin c_{i-1}$ . En este caso, que  $b_1$  co  $b_2$  es inmediato por la misma definición de  $c_i$ , pues ambos son producidos en el mismo paso  $i$ .

Para ver que  $c_i$  es maximal procedemos por reducción al absurdo, suponiendo que existe un  $B$ -corte  $c$  tal que  $c_i \subset c$ . Entonces existe  $b_1 \in c$ ,  $b_1 \notin c_i$  tal que  $\forall b_2 \in c_i$ ,  $b_1 \text{ co } b_2$ . Veamos en primer lugar que  $b_1 \notin c_{i-1}$ .

Si  $b_1 \in c_{i-1}$ , entonces  $b_1 \in {}^*pos^{-1}(i)$ , pues  $b_1 \notin c_i$ . Sea entonces  $e_i \in pos^{-1}(i)$  tal que  $b_1 \in {}^*e_i$ , y sea  $b_3 \in e_i^*$ . Concluimos de ahí que  $b_3 \in c_i$ , lo que es absurdo, pues  $(b_1, b_3) \notin co$ , y  $c$  es una anticadena.

Podemos entonces considerar el conjunto  $c_{i-1} \cup \{b_1\}$ , que contiene estrictamente a  $c_{i-1}$ . Veamos que es una anticadena, lo que contradice la hipótesis de inducción, que establecía que  $c_{i-1}$  es maximal.

Sea  $b_2 \in c_{i-1}$ . Tenemos dos casos posibles:

- Si  $b_2 \in c_i$ . Entonces  $(b_2, b_1) \in co$ , pues  $c_i \subset c$ .
- Si  $b_2 \notin c_i$ . Entonces  $b_2 \in {}^*pos^{-1}(i)$ , pues  $b_2 \in c_{i-1}$ . Tomemos un  $e_i \in b_2^*$ , y un  $b_3 \in e_i^*$ , que estará en  $c_i$ . Por tanto,  $(b_3, b_1) \in co$ , pues  $b_3, b_1 \in c$ . De ahí, es claro que  $b_1 \not\prec b_2$ , ya que en caso contrario, por transitividad obtendríamos  $b_1 < b_3$ . Si por el contrario tuviéramos  $b_2 < b_1$ , entonces habría dos subcasos posibles:
  - Si  $b_1 \in e_i^*$ , entonces  $b_1 \in c_i$ , lo que es absurdo.
  - Si  $b_1 \notin e_i^*$ , entonces existe un  $b_4 \in e_i^*$  tal que  $b_4 < b_1$ . Pero como  $b_4 \in c_i$ , esto implica que  $(b_1, b_4) \in co$ , lo que de nuevo es absurdo.

Nos queda por ver entonces que  ${}^*pos^{-1}(i+1) \subseteq c_i$ . Sea  $b \in {}^*pos^{-1}(i+1)$ . Pueden ocurrir dos casos:

- Si  ${}^*b = \emptyset$ . Entonces  $b \in c_0$ , y por definición de proceso ningún  $j < i+1$  es tal que  $b \in {}^*pos^{-1}(j)$ . De ahí,  $b \in c_i$ .
- Si  ${}^*b \neq \emptyset$ , entonces existe un cierto  $e \in {}^*b$ . Sea  $j = pos(e)$  y  $e_{i+1} \in pos^{-1}(i+1)$  tal que  $b \in {}^*e_{i+1}$ . Entonces  $e < e_{i+1}$ , y de ahí, por definición de compatibilidad,  $j < i+1$ . En consecuencia,  $b \in c_i$ .

Concluimos probando la cuarta propiedad. La inclusión  $\bigcup_{i \in \{0, \dots, n\}} c_i = B$  es inmediata. Sea entonces  $b \in B$ . Pueden presentarse dos casos. Si  ${}^*b = \emptyset$ , entonces  $b \in Min(N') = c_0 \subseteq \bigcup_{i \in \{0, \dots, n\}} c_i$ ; si por el contrario  ${}^*b \neq \emptyset$ , entonces  ${}^*b = \{e\}$  y  $b \in c_{pos(e)}$ . □

**Teorema 9.2** Sea  $N$  una red en las condiciones de la definición 9.1,  $\pi = (N', p)$  un proceso temporizado de  $N$  y  $\sigma$  una secuencia de pasos temporizada compatible con  $\pi$  mediante una función *pos*. Se definen de forma recurrente:

$$\Delta_i : c_i \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \Delta_0(b) &= 0, \forall b \in c_0 \\ \Delta_i(b) &= \begin{cases} 0 & \text{si } b \in c_{i-1} \wedge \Delta_{i-1}(b) = 0 \\ \Delta_{i-1}(b) - 1 & \text{si } b \in c_{i-1} \wedge \Delta_{i-1}(b) > 0 \\ \delta(p(\bullet b)) - 1 & \text{si } b \notin c_{i-1} \end{cases} \end{aligned}$$

Entonces:

1.  $\forall b_1, b_2 \in c_i$  tales que  $\bullet b_1 = \bullet b_2 \Rightarrow \Delta_i(b_1) = \Delta_i(b_2)$
2.  $\forall b \in c_i$  tal que  $\Delta_i(b) > 0 \Rightarrow b \in c_{i+1}$
3.  $\forall \alpha \in \mathbb{N}^+, \forall t \in T : |E_i(\alpha) \cap p^{-1}(t)| = M_i^2(t, \alpha)$

siendo  $M_i = (M_i^1, M_i^2)$  y  $E_i(\alpha) = \{e \in E \mid b \in e^\bullet \Rightarrow b \in c_i \wedge \Delta_i(b) = \alpha\}$

4.  $\Delta_n = \Delta$

**Demostración:**

1. Se razona por inducción. El caso base es trivial, pues  $\Delta_0$  es la función nula. Para el caso general basta tener en cuenta los posibles casos que pueden plantearse en base a la definición realizada.
  - Si  $b_1 \in c_{i-1}$  y  $\Delta_{i-1}(b_1) = 0$ , entonces como  $\bullet b_1 = \bullet b_2$  ha de ocurrir que  $b_2 \in c_{i-1}$  (por definición de  $c_{i-1}$ ) y por tanto  $\Delta_{i-1}(b_2) = 0$ , por la hipótesis de inducción. De ahí, aplicando la definición de  $\Delta_i$ , concluimos que  $\Delta_i(b_1) = \Delta_i(b_2) = 0$ .
  - Si  $b_1 \in c_{i-1}$  y  $\Delta_{i-1}(b_1) > 0$ , entonces como  $\bullet b_1 = \bullet b_2$  ha de ocurrir que  $b_2 \in c_{i-1}$  (por definición de  $c_{i-1}$ ) y por tanto  $\Delta_{i-1}(b_1) = \Delta_{i-1}(b_2)$  por la hipótesis de inducción. Entonces, aplicando la definición de  $\Delta_i$  concluimos que  $\Delta_i(b_1) = \Delta_i(b_2) = \Delta_{i-1}(b_1) - 1$ .
  - Si  $b_1 \notin c_{i-1}$ , entonces  $b_2 \notin c_{i-1}$ . Como  $\bullet b_1 = \bullet b_2$ , según la definición de  $\Delta_i$  concluimos que  $\Delta_i(b_1) = \Delta_i(b_2) = \delta(p(\bullet b_1)) - 1$ .

2. Razonamos de nuevo por inducción. El caso base es trivial, pues no hay ningún  $b$  tal que  $\Delta_0(b) > 0$ . Supongamos entonces cierta la propiedad para  $i - 1$ , y sea  $b \in c_i$  tal que  $\Delta_i(b) > 0$ . Entonces existe un  $e \in {}^\bullet b$ , pues si  $b \in \text{Min}(N')$ , puede comprobarse de forma inmediata que  $\Delta_i(b) = 0$ . Sean entonces  $t = p(e)$  y  $j = \text{pos}(e)$ . Tenemos que  $e \in E_j(\delta(t) - 1)$ , y además,  $b \in c_j$ .

Supongamos entonces que  $b \notin c_{i+1}$ . En tal caso, como  $b \in c_i$  ha de ocurrir que  $b \in {}^\bullet \text{pos}^{-1}(i + 1)$ . De ahí concluimos que  $b \in c_k$ , para  $k = j, \dots, i$ . Esto nos permite calcular  $\Delta_k(b)$ , para  $k = j, \dots, i$ , como sigue:

$$\begin{aligned}\Delta_j(b) &= \delta(t) - 1 \\ \Delta_{j+1}(b) &= \delta(t) - 2 \\ &\dots \\ \Delta_i(b) &= \delta(t) - (i - j + 1) > 0\end{aligned}$$

Por otra parte, como existe  $e_{i+1} \in \text{pos}^{-1}(i + 1)$  tal que  $b \in {}^\bullet e_{i+1}$ , tenemos  $i + 1 - j \geq \delta(t)$ , debido a la condición 2 de la definición de compatibilidad entre  $\pi$  y  $\sigma$ . Pero entonces  $\delta(t) > i - j + 1 \geq \delta(t)$ , lo que es absurdo.

3. También razonamos por inducción en este apartado. El caso base es trivial, dado que  $E_0(\alpha) = \emptyset$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{N}^+$ , y por tanto  $|E_0(\alpha) \cap p^{-1}(t)| = 0$ , que coincide con  $M_0^2(t, \alpha)$ .

Supongamos la propiedad cierta para  $i - 1$ . Recordemos la definición de  $M_i^2$ :

$$M_i^2(t, \alpha) = \begin{cases} R_i(t) & \text{si } R_i(t) > 0 \wedge \alpha = \delta(t) - 1 \\ M_{i-1}^2(t, \alpha + 1) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Se plantean entonces dos casos:

- Si  $\alpha = \delta(t) - 1$  y  $R_i(t) > 0$ , entonces  $M_i^2(t, \alpha) = R_i(t)$ . Aplicando la definición de compatibilidad tenemos que  $|\text{pos}^{-1}(i) \cap p^{-1}(t)| = R_i(t)$ . Hemos de ver entonces que  $E_i(\delta(t) - 1) \cap p^{-1}(t) = \text{pos}^{-1}(i) \cap p^{-1}(t)$ . Pero si  $e \in E_i(\delta(t) - 1) \cap p^{-1}(t)$  tenemos que  $p(e) = t$  y  $\forall b \in e^\bullet$ ,  $\Delta_i(b) = \delta(t) - 1$  y  $b \in c_i$ . Como  $\Delta_i(b) = \delta(t) - 1$  concluimos  $b \notin c_{i-1}$ , por definición de  $\Delta_i$ . Por lo tanto,  $b \in \text{pos}^{-1}(i)^\bullet$ , y de ahí,  $e \in \text{pos}^{-1}(i)$ .



Recíprocamente,  $e \in \text{pos}^{-1}(i) \cap p^{-1}(t) \Rightarrow p(e) = t, \text{pos}(e) = i$ , y de ahí,  $R_i(t) > 0$ . Sea ahora  $b \in e^*$ , tendremos  $b \in \text{pos}^{-1}(i)^*$ , por lo que  $b \in c_i$ , y de ahí,  $\Delta_i(b) = \delta(t) - 1$ . Por tanto,  $e \in E_i(\delta(t) - 1) \cap p^{-1}(t)$ .

- Por contra, si  $M_i^2(t, \alpha) = M_{i-1}^2(t, \alpha + 1)$ , por la hipótesis de inducción tenemos que es igual a  $|E_{i-1}(\alpha + 1) \cap p^{-1}(t)|$ .

Hemos de probar entonces que  $E_{i-1}(\alpha + 1) \cap p^{-1}(t) = E_i(\alpha) \cap p^{-1}(t)$ .

Sea  $e \in E_i(\alpha) \cap p^{-1}(t)$ , tendremos que  $p(e) = t$  y  $\forall b \in e^* : b \in c_i \wedge \Delta_i(b) = \alpha$ . Como  $\Delta_i(b) = \alpha$ , entonces  $b \in c_{i-1}$ , pues en caso contrario  $b \in \text{pos}^{-1}(i)^*$ , de donde  $R_i(t) > 0$  y  $\alpha = \delta(t) - 1$ , lo que contradice nuestra hipótesis. Además, por la definición de  $\Delta_i$ ,  $\Delta_{i-1}(b) = \Delta_i(b) + 1$ , y así,  $e \in E_{i-1}(\alpha + 1)$ .

Recíprocamente, si  $e \in E_{i-1}(\alpha + 1) \cap p^{-1}(t)$ , entonces  $p(e) = t$  y  $\forall b \in e^* : b \in c_{i-1}, \Delta_{i-1}(b) = \alpha + 1$ . De ahí,  $b \in c_i$ , por el apartado 2 que ya hemos probado. Entonces  $\Delta_i(b)$  está definido, tomando el valor  $\Delta_i(b) = \Delta_{i-1}(b) - 1 = \alpha$ . Por tanto,  $e \in E_i(\alpha) \cap p^{-1}(t)$ .

- Utilizaremos la compatibilidad entre  $\pi$  y  $\sigma$  que nos indica  $M_n^2(t, \alpha) = |E(t, \alpha)|$ , con  $E(t, \alpha) = \{e \in E \mid p(e) = t, b \in e^* \Rightarrow (b \in \text{max}(N') \wedge \Delta(b) = \alpha)\}$ . Ahora bien, en virtud del apartado 3, ya probado, sabemos que  $|E_n(\alpha) \cap p^{-1}(t)| = M_n^2(t, \alpha)$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \{e \in E \mid p(e) = t, b \in e^* \Rightarrow (b \in \text{Max}(N') \wedge \Delta(b) = \alpha)\} = \\ \{e \in E \mid p(e) = t, b \in e^* \Rightarrow (b \in c_n \wedge \Delta_n(b) = \alpha)\} \end{aligned}$$

Veamos entonces que  $c_n = \text{Max}(N')$ , lo cual, junto con la igualdad anterior, nos permite concluir que  $\forall b \in c_n, \Delta(b) = \Delta_n(b)$ .

Ahora bien, si  $b \in c_n$ , tendremos  $b \in \text{Max}(N')$ , pues en caso contrario existe un cierto  $e \in b^*$ , de modo que  $b \notin c_{\text{pos}(e)}$ , lo que implica  $b \notin c_n$ , que es absurdo.

Recíprocamente, si  $b \in \text{Max}(N')$  entonces  $b \in c_n$ , pues en caso contrario existirá un  $i$  tal que  $b \in c_i$ , y  $b \notin c_{i+1}$ . De ahí se concluye que  $b \notin \text{Max}(N')$ , lo cual es absurdo.

□

**Teorema 9.3** Sea  $N$  una red en las condiciones de la definición 9.1,  $\pi = (N', p)$  un proceso temporizado de  $N$  y  $\sigma$  una secuencia de pasos temporizada compatible con  $\pi$  mediante una cierta función  $pos$ . Entonces:

$$\forall s \in S, \forall i \in \{0, \dots, n\} \quad M_i^1(s) = |p^{-1}(s) \cap Disp_i|$$

siendo  $Disp_i = \{b \in c_i \mid \Delta_i(b) = 0\}$  (tokens disponibles en el instante  $i$ ).

**Demostración:** Por inducción respecto de  $i$ . El caso base se obtiene aplicando la condición 4 de la definición de proceso temporizado, pues  $Disp_0 = c_0 = Min(N')$ . Para el caso general supondremos válida la propiedad para  $i - 1$  y veamos qué ocurre para  $i$ .

Recordemos la definición de  $M_i^1$ :

$$M_i^1(s) = M_{i-1}^1(s) - \sum_{t \in s^*} R_i(t) + \sum_{\substack{t \in s^* \\ \delta(t)=1}} R_i(t) + \sum_{t \in s^*} M_{i-1}^2(t, 1)$$

Por hipótesis de inducción:

$$M_{i-1}^1(s) = |p^{-1}(s) \cap Disp_{i-1}|$$

Tenemos que relacionar  $Disp_{i-1}$  con  $Disp_i$ . Para ello desarrollamos  $Disp_i$ .

$$\begin{aligned} Disp_i &= \{b \in c_i \mid \Delta_i(b) = 0\} = \{b \in c_{i-1} - \bullet pos^{-1}(i) \mid \Delta_i(b) = 0\} \cup \\ &\quad \{b \in pos^{-1}(i) \bullet \mid \Delta_i(b) = 0\} = A \cup B \cup C \end{aligned}$$

siendo  $A = \{b \in c_{i-1} - \bullet pos^{-1}(i) \mid \Delta_{i-1}(b) = 0\}$ ,  $B = \{b \in c_{i-1} - \bullet pos^{-1}(i) \mid \Delta_{i-1}(b) = 1\}$ ,  $C = \{b \in pos^{-1}(i) \bullet \mid \Delta_i(b) = 0\}$

Como estos conjuntos son disjuntos dos a dos, tenemos

$$|p^{-1}(s) \cap Disp_i| = |p^{-1}(s) \cap A| + |p^{-1}(s) \cap B| + |p^{-1}(s) \cap C|$$

Analicemos pues cada sumando por separado, y veamos de esta forma que esta expresión coincide con la definición de  $M_i^1(s)$ .

$$1. |p^{-1}(s) \cap A| = |\{b \in c_{i-1} - \bullet pos^{-1}(i) \mid p(b) = s, \Delta_{i-1}(b) = 0\}|$$

Como  $\bullet pos^{-1}(i) \subseteq c_{i-1}$ , tenemos

$$\begin{aligned} |p^{-1}(s) \cap A| &= |\{b \in c_{i-1} \mid p(b) = s, \Delta_{i-1}(b) = 0\}| - |\{b \in \bullet pos^{-1}(i) \mid \\ &\quad p(b) = s, \Delta_{i-1}(b) = 0\}| = M_{i-1}^1(s) - |\{b \in \bullet pos^{-1}(i) \mid p(b) = s, \Delta_{i-1}(b) = \\ &\quad 0\}|. \end{aligned}$$

Para cada  $b \in {}^*pos^{-1}(i)$  tal que  $p(b) = s$  existe un cierto  $e \in pos^{-1}(i)$  tal que  $b \in {}^*e$ . De hecho, por definición de proceso, para ese evento  $e$ , se tiene que  $b$  es el único en su precondition tal que  $p(b) = s$ . Por tanto, el segundo conjunto tiene el mismo cardinal que:

$$D = \{e \in pos^{-1}(i) \mid \exists b \in {}^*e, p(b) = s, \Delta_{i-1}(b) = 0\}$$

Entonces los eventos en  $D$  corresponden a transiciones en la postcondición de  $s$  disparadas en el paso  $i$ . Veamos ahora que para cada transición en la postcondición de  $s$  disparada en el paso  $i$  hay un evento en  $D$  asociado a dicha transición. Para ello sea  $t \in R_i$ ,  $t \in s^*$ . Entonces, por la compatibilidad entre  $\pi$  y  $\sigma$  tenemos:

$$|pos^{-1}(i) \cap p^{-1}(t)| = R_i(t)$$

Sea  $e \in pos^{-1}(i) \cap p^{-1}(t)$ . Entonces  $p(e) = t$ ,  $pos(e) = i$ . Además, como  $t \in s^*$ , existe  $b$  tal que  $p(b) = s$ ,  $b \in {}^*e$ . Además, por ser  $e \in pos^{-1}(i)$ , se tiene que  $b \notin c_i$ ,  $b \in c_{i-1}$ . Entonces  $\Delta_{i-1}(b) = 0$ , ya que según el apartado 2 del teorema 9.2, si tuviésemos  $\Delta_{i-1}(b) > 0$  tendríamos  $b \in c_i$ , que es una contradicción. De ahí,  $e \in D$ .

Por tanto:

$$\forall t \in s^* \quad R_i(t) = |D \cap p^{-1}(t)|$$

En consecuencia:  $|D| = \sum_{t \in s^*} R_i(t)$

con lo que

$$|p^{-1}(s) \cap A| = M_{i-1}^1(s) - \sum_{t \in s^*} R_i(t)$$

$$2. |p^{-1}(s) \cap B| = |\{b \in c_{i-1} - {}^*pos^{-1}(i) \mid p(b) = s, \Delta_{i-1}(b) = 1\}|.$$

Por el teorema 9.2 tenemos  $M_{i-1}^2(t, 1) = |E_{i-1}(1) \cap p^{-1}(t)|$ , siendo  $E_{i-1}(1) = \{e \in E \mid b \in e^* \Rightarrow (b \in c_{i-1} \wedge \Delta_{i-1}(b) = 1)\}$ .

Sea  $t \in {}^*s$ ; tenemos:

- Si  $e \in E_{i-1}(1) \cap p^{-1}(t)$ , entonces por definición de proceso existirá un cierto  $b \in B$  tal que  $p(b) = s$  y  $b \in e^*$ . Además, dicho lugar  $b$  es único y

cumple  $\Delta_{i-1}(b) = 1$ ,  $b \in c_{i-1}$ . Entonces, por el apartado 2 del teorema 9.2 concluimos que  $b \in c_i$ . En consecuencia

$$b \in \{b' \in c_{i-1} - {}^\bullet pos^{-1}(i) \mid p(b') = s, \Delta_{i-1}(b') = 1\}$$

- Recíprocamente, si  $b \in \{b' \in c_{i-1} - {}^\bullet pos^{-1}(i) \mid p(b') = s, \Delta_{i-1}(b') = 1\}$ , entonces  $\Delta_{i-1}(b) = 1$ , lo que implica que existe  $e \in {}^\bullet b$  (que de nuevo es único por definición de proceso) tal que  $p(e) = t$ . Entonces  $e^\bullet \subseteq c_{i-1}$ , y por el apartado 1 del teorema 9.2 concluimos que  $\forall b' \in e^\bullet, \Delta_{i-1}(b') = 1$ .

Por tanto:

$$|p^{-1}(s) \cap B| = \sum_{t \in {}^\bullet s} M_{i-1}^2(t, 1)$$

3. Por definición de  $\Delta_i$ , si  $b \in pos^{-1}(i)^\bullet$  y  $\Delta_i(b) = 0$ , entonces  $\delta(p({}^\bullet b)) = 1$ , con lo que  $|p^{-1}(s) \cap C| = |\{b \in pos^{-1}(i)^\bullet \mid p(b) = s, \delta(p({}^\bullet b)) = 1\}|$ .

Sea  $b \in p^{-1} \cap C$ . Entonces existe un cierto  $e \in pos^{-1}(i)$  tal que  $b \in e^\bullet$ . Además,  $\delta(t) = 1$ , para  $t = p(e)$ . Por tanto,  $e \in pos^{-1}(i) \cap p^{-1}(t)$ , y de hecho, sólo hay un evento  $e$  en esas condiciones. Recíprocamente, si  $e \in pos^{-1}(i) \cap p^{-1}(t)$ , con  $\delta(t) = 1$ ,  $t \in {}^\bullet s$ , entonces por ser  $t$  precondition de  $s$  existirá  $b \in e^\bullet$  tal que  $p(b) = s$ , de modo que  $b \in pos^{-1}(i)^\bullet$ ,  $p(b) = s$  y  $\delta(p({}^\bullet b)) = 1$ . Por tanto,  $b \in C$  y es único en esas condiciones.

De ahí

$$|p^{-1}(s) \cap C| = \sum_{\substack{t \in {}^\bullet s \\ \delta(t)=1}} R_i(t)$$

□

Seguidamente introducimos la noción de isomorfismo entre procesos temporizados, que difiere del isomorfismo clásico en la aparición de una nueva condición que exige que para los eventos correspondientes a transiciones en ejecución los tiempos asociados sean los mismos.

**Definición 9.3** (Isomorfismo entre procesos temporizados)

Sea  $N = (S, T, F, \delta, M_0)$  una Red de Petri Temporizada en las condiciones de la definición 9.1. Sean  $\pi_1, \pi_2$  dos procesos de  $N$ . Se dice que  $\pi_1$  y  $\pi_2$  son isomorfos ( $\pi_1 \cong \pi_2$ ) si y sólo si existe una biyección  $\beta : B_1 \cup E_1 \longrightarrow B_2 \cup E_2$  tal que

1.  $\forall x \in B_1 \cup E_1, p_1(x) = p_2(\beta(x))$
2.  $\forall x_1, x_2 \in B_1 \cup E_1, x_1 \leq_1 x_2 \text{ sii } \beta(x_1) \leq_2 \beta(x_2)$
3.  $\forall b \in B_1, \Delta_1(b) = \Delta_2(\beta(b))$

□

**Teorema 9.4** Sea  $N = (S, T, F, \delta, M_0)$  una Red de Petri Temporalizada en las condiciones de la definición 9.1 y  $\sigma = M_0[R_1]M_1 \dots [R_n]M_n$  una secuencia de pasos temporalizada. Entonces existe un proceso temporalizado de  $N$ ,  $\pi = (N', p)$  compatible con  $\sigma$ .

**Demostración:** La demostración se basa en la construcción de forma recurrente de una familia de procesos temporalizados  $\{\pi_i(N)\}$ . A cada  $\pi_i$  se le llamará un *subproceso* de  $\pi$ . Inicialmente definimos  $\pi_0(N) = (N'_0, p_0)$ , siendo  $N'_0 = (B_0, \emptyset, \emptyset, \Delta_0)$ , donde  $B_0 = \{b_j(s) \mid s \in S, 1 \leq j \leq M_0(s)\}$ ,  $p_0(b_j(s)) = s, \forall j \in \{1, \dots, M_0(s)\}, \forall s \in S$  y  $\Delta_0(b_j(s)) = 0, \forall j \in \{1, \dots, M_0(s)\}, \forall s \in S$ .

La comprobación de que  $\pi_0(N)$  es efectivamente un proceso temporalizado es inmediata. Además es compatible trivialmente con la subsecuencia de pasos vacía. Supongamos entonces definido  $\pi_i$ , y veamos cómo definir  $\pi_{i+1}$ . Para ello, para cada  $t_{i+1} \in R_{i+1}$  repetimos el siguiente proceso  $R_{i+1}(t_{i+1})$  veces:

1. Para cada  $s \in {}^*t_{i+1}$  elegimos un lugar condición  $b(s, t_{i+1}) \in \text{Max}(N'_i) \cap p_i^{-1}(s)$  tal que  $\Delta_i(b(s, t_{i+1})) = 0$  no elegido anteriormente; y añadimos un nuevo evento  $e(t_{i+1})$ , que conectamos en la forma  $(b(s, t_{i+1}), e(t_{i+1})) \in F_{i+1}$ , haciendo  $p_{i+1}(e(t_{i+1})) = t_{i+1}$ .
2. Para cada  $s \in t_{i+1}^*$  se añade un nuevo lugar condición  $\hat{b}(s, t_{i+1})$ , y se introduce la conexión  $(e(t_{i+1}), \hat{b}(s, t_{i+1})) \in F_{i+1}$ , tomando  $p_{i+1}(\hat{b}(s, t_{i+1})) = s$  y  $\Delta_{i+1}(\hat{b}(s, t_{i+1})) = \delta(t_{i+1}) - 1$ .
3. Para cada  $b_i \in \text{Max}(N'_i)$  tal que  $\Delta_i(b_i) > 0$  se toma  $\Delta_{i+1}(b_i) = \Delta_i(b_i) - 1$ .

Más formalmente, se define  $\pi_{i+1} = (N'_{i+1}, p_{i+1})$ , con  $N'_{i+1} = (B_{i+1}, E_{i+1}, F_{i+1}, \Delta_{i+1})$ , donde:

$$\begin{aligned}
 B_{i+1} &= B_i \cup \bigcup_{t_{i+1} \in R_{i+1}} \{\hat{b}_j(s, t_{i+1}) \mid s \in t_{i+1}^\bullet, j \in \{1, \dots, R_{i+1}(t_{i+1})\}\} \\
 E_{i+1} &= E_i \cup \bigcup_{t_{i+1} \in R_{i+1}} \{e_j(t_{i+1}) \mid 1 \leq j \leq R_{i+1}(t_{i+1})\} \\
 F_{i+1} &= F_i \cup \bigcup_{t_{i+1} \in R_{i+1}} \{(b_j(s, t_{i+1}), e_j(t_{i+1})) \mid s \in t_{i+1}^\bullet, 1 \leq j \leq R_{i+1}(t_{i+1})\} \cup \\
 &\quad \bigcup_{t_{i+1} \in R_{i+1}} \{(e_j(t_{i+1}), \hat{b}_j(s, t_{i+1})) \mid s \in t_{i+1}^\bullet, 1 \leq j \leq R_{i+1}(t_{i+1})\} \\
 \Delta_{i+1}(b) &= \begin{cases} 0 & \text{si } b \neq \hat{b}_j(s, t_{i+1}) \wedge \Delta_i(b) = 0 \\ \Delta_i(b) - 1 & \text{si } b \neq \hat{b}_j(s, t_{i+1}) \wedge \Delta_i(b) > 0 \\ \delta(t_{i+1}) - 1 & \text{si } b = \hat{b}_j(s, t_{i+1}) \end{cases} \\
 p_{i+1}(b) &= \begin{cases} p_i(b) & \text{si } b \neq \hat{b}_j(s, t_{i+1}) \\ s & \text{si } b = \hat{b}_j(s, t_{i+1}) \end{cases} \\
 p_{i+1}(e) &= \begin{cases} p_i(e) & \text{si } e \neq e_j(t_{i+1}) \\ t_{i+1} & \text{si } e = e_j(t_{i+1}) \end{cases}
 \end{aligned}$$

donde  $\forall t_{i+1} \in R_{i+1}$ , el conjunto  $\{b_j(s, t_{i+1}) \mid 1 \leq j \leq R_{i+1}(t_{i+1})\}$  está formado por lugares diferentes del conjunto  $Max(N'_i) \cap p_i^{-1}(s) \cap \Delta_i^{-1}(0)$ .

Esta construcción termina cuando  $i = n$ . Hemos de demostrar que  $\pi_{i+1}$  es un proceso compatible con la subsecuencia  $M_0[R_1]M_1 \dots [R_{i+1}]M_{i+1}$ , considerando como hipótesis de inducción que  $\pi_i$  es un proceso compatible con la subsecuencia  $\sigma_i = M_0[R_1]M_1 \dots [R_i]M_i$ .

En primer lugar hemos de probar que  $\pi_{i+1}$  está bien definido. Para ello hemos de ver que existen los  $b_j(s, t_{i+1})$  requeridos por la construcción. Es decir, hay que probar

$$|Max(N'_i) \cap p_i^{-1}(s) \cap \Delta_i^{-1}(0)| \geq R_{i+1}(t_{i+1})$$

Sea  $s \in t_{i+1}^\bullet$ , entonces como  $M_i$  es un marcaje que permite el disparo de  $R_{i+1}$  se cumple:  $M_i^1(s) \geq R_{i+1}(t_{i+1})$ . De la compatibilidad entre  $\pi_i$  y  $\sigma_i$  concluimos la existencia de  $B$ -cortes  $c_{i,0}, \dots, c_{i,i}$  tales que  $c_{i,i} = Max(N'_i)$ , y de funciones  $\tilde{\Delta}_{i,1}, \dots, \tilde{\Delta}_{i,i}$ , con  $\tilde{\Delta}_{i,i} = \Delta_i$ . Por el teorema 9.3 tenemos  $M_i^1(s) = |p_i^{-1}(s) \cap Disp_i|$ , siendo  $Disp_i = \{b \in Max(N'_i) \mid \Delta_i(b) = 0\}$ . Por tanto,  $M_i^1(s) = |p_i^{-1}(s) \cap Max(N'_i) \cap \Delta_i^{-1}(0)|$ , y de ahí,  $|p_i^{-1}(s) \cap Max(N'_i) \cap \Delta_i^{-1}(0)| \geq R_{i+1}(t_{i+1})$ , como queríamos demostrar. Por tanto,  $\pi_{i+1}$  está bien definido.

Ahora hemos de probar que  $\pi_{i+1}$  es un proceso. Para ello hemos de ver que se cumplen las condiciones de la definición 9.1.

1.  $\text{Min}(N'_{i+1})$  es un  $B_{i+1}$ -corte de  $N'_{i+1}$ .

Trivial, pues  $\text{Min}(N'_{i+1}) = \text{Min}(N'_i) = \text{Min}(N'_0)$ .

2.  $p_{i+1}(B_{i+1}) \subseteq S$ ,  $p_{i+1}(E_{i+1}) \subseteq T$ .

Trivial.

3.  $\forall s \in S, \forall e \in E : F(s, p_{i+1}(e)) = |p_{i+1}^{-1}(s) \cap \bullet e|$ ,  $F(p_{i+1}(e), s) = |p_{i+1}^{-1}(s) \cap e^\bullet|$ .

Supongamos que  $(s, p_{i+1}(e)) \in F$ . Entonces hay dos casos posibles:

(i) Si  $p_{i+1}(e) = p_i(e)$ , entonces basta aplicar la hipótesis de inducción y la definición de  $p_{i+1}$ , que coincide con  $p_i$  sobre los lugares precondition de  $e$ .

(ii) Si  $p_{i+1}(e) = t_{i+1}$ , para un cierto  $t_{i+1} \in R_{i+1}$ , entonces  $e = e_j(t_{i+1})$ , para algún  $j$ . Entonces, por la construcción realizada existe  $b_j(s, t_{i+1})$  tal que  $(b_j(s, t_{i+1}), e_j(t_{i+1})) \in F_{i+1}$ . De ahí,  $|p_{i+1}^{-1}(s) \cap \bullet e| = 1$ .

Si, por el contrario,  $(s, p_{i+1}(e)) \notin F$ , hay que distinguir de nuevo dos casos:

(i) Si  $p_{i+1}(e) = p_i(e)$ , entonces basta aplicar de nuevo la hipótesis de inducción.

(ii) Si  $e = e_j(t_{i+1})$ , para algún  $j$  y para alguna  $t_{i+1} \in R_{i+1}$ , entonces  $p_{i+1}(e) = t_{i+1}$ , y entonces, por la construcción realizada tenemos  $p_{i+1}^{-1}(s) \cap \bullet e = \emptyset$ .

La igualdad  $F(p_{i+1}(e), s) = |p_{i+1}^{-1}(s) \cap e^\bullet|$  se razona de forma análoga.

4.  $\forall s \in S, M_0^1(s) = |p_{i+1}^{-1}(s) \cap \text{Min}(N'_{i+1})|$ .

Es inmediato, pues  $p_{i+1}|_{\text{Min}(N'_{i+1})} = p_{i+1}|_{\text{Min}(N'_i)} = p_i|_{\text{Min}(N'_i)}$ , y por tanto, puede aplicarse la hipótesis de inducción.

5.  $\forall b (b \notin \text{Max}(N'_{i+1}) \vee b \in \text{Min}(N'_{i+1}) \cap \text{Max}(N'_{i+1})) \Rightarrow \Delta_{i+1}(b) = 0$ .

(i) Sea  $b \notin \text{Max}(N'_{i+1})$ , entonces pueden ocurrir dos casos. O bien  $b \in \text{Max}(N'_i)$ ,  $b = b_j(s, t_{i+1})$ , y en ese caso,  $\Delta_i(b) = 0$  (por la definición de

$b_j(s, t_{i+1}))$ , con lo cual  $\Delta_{i+1}(b) = 0$ ; o bien  $b \notin \text{Max}(N'_i)$ , y entonces basta aplicar la hipótesis de inducción y la definición de  $\Delta_{i+1}$ .

(ii) Sea  $b \in \text{Min}(N'_{i+1}) \cap \text{Max}(N'_{i+1})$ . En este caso basta usar la hipótesis de inducción y la definición de  $\Delta_{i+1}$ .

6.  $\forall b \in \text{Max}(N'_i), \Delta_{i+1}(b) \in \{0, \dots, \delta(p_{i+1}(\bullet b)) - 1\}$ .

Trivial.

7.  $\forall e \in E_{i+1}, \forall b_1, b_2 \in e^\bullet, \Delta_{i+1}(b_1) = \Delta_{i+1}(b_2)$ .

Si  $e \in E_i$  se aplica la hipótesis de inducción y la definición de  $\Delta_{i+1}$ . En caso contrario,  $e = e_j(t_{i+1})$ , para algún  $j$  y algún  $t_{i+1} \in R_{i+1}$ . Entonces basta tener en cuenta que  $\Delta_{i+1}$  está definida de la misma forma sobre todos los  $\hat{b}_j(s, t_{i+1}) \in e^\bullet$ .

Finalmente, hemos de probar que  $\pi_{i+1}$  es compatible con  $\sigma_{i+1}$ . Para ello definimos  $\text{pos}_{i+1} : E_{i+1} \longrightarrow \{1, \dots, i+1\}$  como sigue:

$$\text{pos}_{i+1}(e) = \begin{cases} \text{pos}_i(e) & \text{si } e \in E_i \\ i+1 & \text{si } e = e_j(t_{i+1}), \text{ con } t_{i+1} \in R_{i+1} \end{cases}$$

teniéndose que probar que se cumplen las condiciones de la definición 9.2.

1.  $\forall t \in T, \forall j \in \{1, \dots, i+1\}, |\text{pos}_{i+1}^{-1}(j) \cap p_{i+1}^{-1}(t)| = R_j(t)$ .

Para  $j = 1, \dots, i$  dicha igualdad será cierta, pues si  $e \in \text{pos}_{i+1}^{-1}(j) \cap p_{i+1}^{-1}(t)$ , entonces se tiene  $\text{pos}_{i+1}(e) = j < i+1$ , por lo que  $e \in \text{pos}_i^{-1}(j)$ . Además,  $e \neq e_k(t_{i+1})$ , para todo  $t_{i+1} \in R_{i+1}$  y todo  $k \in \{1, \dots, R_{i+1}(t_{i+1})\}$ , ya que en caso contrario tendríamos  $\text{pos}_{i+1}(e) = i+1$ . Por lo tanto,  $e \in p_i^{-1}(t)$ , con lo cual basta aplicar la hipótesis de inducción.

Para  $j = i+1$ ,  $|\text{pos}_{i+1}^{-1}(i+1) \cap p_{i+1}^{-1}(t)| = R_{i+1}(t)$ , pues el conjunto  $\text{pos}_{i+1}^{-1}(i+1) \cap p_{i+1}^{-1}(t)$  está formado exactamente por los  $e_j(t)$ , y tenemos  $R_{i+1}(t)$  de ellos.

2.  $\forall e, e' \in E_{i+1}, e < e' \Rightarrow \text{pos}_{i+1}(e) < \text{pos}_{i+1}(e')$  y  $\text{pos}_{i+1}(e') - \text{pos}_{i+1}(e) \geq \delta(p_{i+1}(e))$ .



La primera parte es trivial, por la definición de  $pos_{i+1}$  y la hipótesis de inducción. Para la segunda hemos de distinguir los distintos casos que pueden plantearse:

- Si  $e = e_j(t_{i+1})$ , para algún  $t_{i+1} \in R_{i+1}$  y algún  $j$ , entonces no puede haber ningún  $e'$  tal que  $e < e'$ . Por tanto, en realidad este caso no puede darse.
- Si  $e, e' \notin \{e_j(t_{i+1}) \mid t_{i+1} \in R_{i+1}, j = 1, \dots, R_{i+1}(t_{i+1})\}$ , entonces basta aplicar la hipótesis de inducción.
- Si  $e \notin \{e_j(t_{i+1}) \mid t_{i+1} \in R_{i+1}, j = 1, \dots, R_{i+1}(t_{i+1})\}$  y  $e' = e_j(t_{i+1})$  para algún  $t_{i+1} \in R_{i+1}$  y algún  $j$ , entonces  $pos_{i+1}(e') = i + 1$ , y  $pos_{i+1}(e) = pos_i(e)$ . Sea entonces  $b_l(s, t_{i+1}) \in {}^*e'$  tal que  $e < b_l(s, t_{i+1})$ .

Si existe  $e'' \neq e$  tal que  $e < e'' < e'$ , con  $e''$  tal que  $e'' \in {}^*b_l(s, t_{i+1})$ , entonces  $e'' \notin \{e_j(t_{i+1}) \mid t_{i+1} \in R_{i+1}, j = 1, \dots, R_{i+1}(t_{i+1})\}$ , y por tanto,  $e'' \in E_i$ . Aplicando la hipótesis de inducción se obtiene  $pos_i(e'') - pos_i(e) \geq \delta(p_i(e))$ . Ahora bien,  $pos_{i+1}(e) = i + 1 \geq pos_i(e'')$ , por tanto, en este caso,  $pos_{i+1}(e) - pos_i(e) \geq \delta(p_i(e))$ , que se traslada a  $i + 1$  de forma inmediata.

Si no existe un  $e''$  con esas condiciones, entonces  $b_l(s, t_{i+1}) \in e^*$ . Como  $\Delta_i(b_l(s, t_{i+1})) = 0$ , y  $\pi_i$  y  $\sigma_i$  son compatibles, tenemos que  $b_l(s, t_{i+1}) \in c_{i,h}$ , para  $h = pos_i(e)$ , y  $\tilde{\Delta}_{i,h}(b_l(s, t_{i+1})) = \delta(p_i(e)) - 1$ . Además,  $b_l(s, t_{i+1}) \in c_{i,k}$ , para  $k = h, \dots, i$ , y  $\tilde{\Delta}_{i,i}(b_l(s, t_{i+1})) = \max\{0, \delta(p_i(e)) - (i - h + 1)\}$ . Como  $\tilde{\Delta}_{i,i}(b_l(s, t_{i+1})) = 0$ , entonces  $\delta(p_i(e)) - (i - h + 1) \leq 0$ , lo que implica  $\delta(p_i(e)) \leq i + 1 - h$ , es decir,  $\delta(p_i(e)) \leq pos_{i+1}(e') - pos_i(e)$ , lo que se traslada a  $i + 1$  de forma inmediata.

3.  $\forall t \in T, \forall \alpha \in \mathbb{N}^+, M_{i+1}^2(t, \alpha) = |E_{i+1}(t, \alpha)|$ , con  $E_{i+1}(t, \alpha) = \{e \in E_{i+1} \mid p_{i+1}(e) = t, b \in e^* \Rightarrow (b \in \max(N'_{i+1}) \wedge \Delta_{i+1}(b) = \alpha)\}$ .

Hay que considerar los dos casos siguientes:

- Si  $\alpha \neq \delta(t) - 1$ , entonces  $\forall e \in E_{i+1}(t, \alpha)$  se tiene  $e \notin \{e_j(t_{i+1}) \mid t_{i+1} \in R_{i+1}, 1 \leq j \leq R_{i+1}(t_{i+1})\}$ , ya que estos eventos tienen en sus lugares postcondición  $\Delta_{i+1}$  igual a  $\delta(t) - 1$ . Entonces, por la definición de  $\Delta_{i+1}$  tenemos  $E_{i+1}(t, \alpha) = E_i(t, \alpha + 1)$ . En consecuencia, aplicando la

hipótesis de inducción tenemos que  $M_i^2(t, \alpha + 1) = |E_i(t, \alpha + 1)|$ . Ahora bien, para  $\alpha \neq \delta(t) - 1$  se tiene  $M_{i+1}^2(t, \alpha) = M_i^2(t, \alpha + 1)$ , y por tanto  $M_{i+1}^2(t, \alpha) = |E_{i+1}(t, \alpha)|$ .

- Si  $\alpha = \delta(t) - 1$ , entonces  $\forall e \in E_{i+1}(t, \delta(t) - 1)$  se tiene que  $\Delta_{i+1}(b) = \delta(t) - 1, \forall b \in e^*$ . Ello sólo puede ocurrir si  $e = e_j(t)$ , para algún  $t \in R_{i+1}$  y algún  $j$ . Entonces  $|E_{i+1}(t, \delta(t) - 1)| = |\{e_j(t) \mid 1 \leq j \leq R_{i+1}(t)\}| = R_{i+1}(t)$ , que coincide con la definición de  $M_{i+1}^2(t, \delta(t) - 1)$ .

□

Como ya sucedía en el caso no temporizado, la construcción anterior no genera un único proceso, sino una colección de los mismos, que difieren según vayamos escogiendo los lugares  $b_j(s, t_{i+1})$ . Como allí, también se tiene que todo proceso temporizado compatible con  $\sigma$  puede ser construido por aplicación de la construcción presentada en el teorema anterior.

**Teorema 9.5** Sea  $N$  una Red de Petri Temporizada en las condiciones de la definición 9.1,  $\sigma$  una secuencia de pasos temporizada de  $N$  y  $\pi$  un proceso temporizado compatible con  $\sigma$ . Entonces  $\pi$  puede ser construido siguiendo la construcción presentada en la prueba del teorema anterior.

**Demostración:** Por inducción sobre el número de pasos de  $\sigma$ .

**CASO BASE:** Suponemos que  $\sigma = M_0$ . En este caso  $\pi$  sólo puede ser  $\pi = ((B_0, \emptyset, \emptyset, \Delta_0), p_0)$ , con  $\Delta_0 = 0$ , por definición de compatibilidad; y éste es el proceso temporizado  $\pi_0$  constructible a partir de la secuencia de pasos  $\sigma$  aplicando la construcción.

**CASO GENERAL:**

Se supone ahora que  $\sigma$  tiene longitud  $i + 1$ . Entonces  $\pi$  tiene un subproceso  $\pi_i$ , que es compatible con la subsecuencia  $\sigma_i$  de  $\sigma$  de longitud  $i$ , el cual puede obtenerse aplicando la construcción (hipótesis de inducción). Veamos que podemos extender  $\pi_i$  a  $\pi_{i+1}$ , siguiendo las indicaciones de dicha construcción.

Sea  $\pi_i = (N'_i, p_i)$ ,  $N'_i = (B_i, E_i, W_i, \Delta_i)$ , y sea el conjunto  $\text{pos}^{-1}(i + 1)$  (que puede ser vacío). Ahora bien, si es vacío, por la condición 1 de compatibilidad se tiene  $R_{i+1} = \emptyset$ , y entonces al aplicar la construcción obtenemos  $\pi_{i+1} = (N'_{i+1}, p_{i+1})$ , con  $B_{i+1} = B_i$ ,  $E_{i+1} = E_i$ ,  $W_{i+1} = W_i$ ,  $\Delta_{i+1}(b) = 0$ , si  $\Delta_i(b) = 0$ , y  $\Delta_{i+1}(b) =$

$\Delta_i(b) - 1$ , si  $\Delta_i(b) > 0$ . Pero del hecho de que  $\pi_i$  es subproceso de  $\pi$ , y compatible con  $\sigma_i$ , se sigue que la diferencia entre  $\pi_i$  y  $\pi$  es exactamente la que existe entre  $\pi_i$  y  $\pi_{i+1}$ , por lo que  $\pi = \pi_{i+1}$ .

Si  $\text{pos}^{-1}(i+1) \neq \emptyset$ , entonces  $\forall e_{i+1} \in \text{pos}^{-1}(i+1)$  se tiene  $p(e_{i+1}) = t_{i+1} \in R_{i+1}$ . Además, de  $|\text{pos}^{-1}(i+1) \cap p^{-1}(t_{i+1})| = R_{i+1}(t_{i+1})$  se concluye que hay tantos eventos en  $\text{pos}^{-1}(i+1)$  como instancias de transiciones en  $R_{i+1}$ .

Para cada evento  $e_{i+1} \in \text{pos}^{-1}(i+1)$  sea  $s \in {}^*t_{i+1}$ , con  $t_{i+1} = p(e_{i+1})$ . Entonces tenemos:  $|p^{-1}(s) \cap {}^*e_{i+1}| = 1$ , y por tanto existe  $b(s, t_{i+1}) \in p^{-1}(s) \cap {}^*e_{i+1}$ . Este razonamiento se puede repetir para cada evento  $e_{i+1}$  y cada lugar  $s \in {}^*t_{i+1}$ , obteniéndose una serie de lugares diferentes que constituyen el conjunto

$$\{b_j(s, t_{i+1}) \mid s \in {}^*t_{i+1}, t_{i+1} \in R_{i+1}, 1 \leq j \leq R_{i+1}(t_{i+1})\}$$

Además,  $\Delta_i(b_j(s, t_{i+1})) = 0$ , pues tenemos los hechos siguientes:

- (i)  ${}^*\text{pos}^{-1}(i+1) \subseteq c_i$ , con lo cual  $\Delta_i$  está definido sobre  $b_j(s, t_{i+1})$ .
- (ii) Si  ${}^*b_j(s, t_{i+1}) = \emptyset$ , entonces  $\Delta_i(b_j(s, t_{i+1})) = 0$
- (iii) Si  $\exists e \in {}^*b_j(s, t_{i+1})$ , entonces  $e < e_{i+1} \Rightarrow \text{pos}(e_{i+1}) - \text{pos}(e) \geq \delta(p(e))$ . Por tanto,  $i+1 - \text{pos}(e) \geq \delta(p(e))$ . Entonces  $\Delta_{\text{pos}(e)}(b_j(s, t_{i+1})) = \delta(p(e)) - 1$ , y tenemos que  $b_j(s, t_{i+1}) \in c_h$ , para  $h = \text{pos}(e), \dots, i$ . En consecuencia, podemos calcular  $\Delta_k(b_j(s, t_{i+1}))$ , para  $k = \text{pos}(e), \dots, i$ . En particular, para  $\Delta_i$  obtenemos  $\Delta_i(b_j(s, t_{i+1})) = \delta(p(e)) - (i - \text{pos}(e) + 1)$ . Como finalmente tenemos  $i+1 - \text{pos}(e) \geq \delta(p(e))$ , concluimos que  $\delta(p(e)) - (i+1) - \text{pos}(e) \leq 0$ , y por tanto,  $\Delta_i(b_j(s, t_{i+1})) = 0$ .

De lo anterior concluimos que podemos extender  $\pi_i$  al proceso  $\pi$  de partida según la construcción del teorema sin más que tomar los  $b_j(s, t_{i+1})$  en la forma indicada arriba.  $\square$

Tal como ocurre en redes no temporizadas, para las redes 1-seguras hay unicidad en la correspondencia, es decir, existe un único proceso  $\pi$  asociado a una secuencia de pasos dada.

A continuación introducimos la noción de *duración de un proceso*, que nos indica la duración mínima de una secuencia de pasos compatible con dicho proceso, y posteriormente utilizamos esta noción para obtener el recíproco del teorema 9.4.

**Definición 9.4** (Duración de un Proceso Temporizado)

Sea  $N = (S, T, F, \delta, M_0)$  una Red de Petri Ordinaria Temporizada en las condiciones de la definición 9.1 y  $\pi = (N', p)$  un proceso temporizado de  $N$ . Se define la *duración* de  $\pi$  de la forma siguiente:

$$D(\pi) = \begin{cases} 0 & \text{si } N' = (B, \emptyset, \emptyset, 0) \\ D(\pi') + 1 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

donde  $\pi'$  es el proceso  $(N'', p')$ ,  $N'' = (B', E', W', \Delta')$ , definido por:

$$B' = B - A^\bullet$$

$$E' = E - A$$

$$W' = W|_{B' \times E' \cup E' \times B'}$$

$$\Delta'(b) = \begin{cases} \Delta(b) + 1 & \text{si } b \in \text{Max}(N') \wedge b \notin \text{Min}(N') \wedge \Delta(b) < \delta(p(\bullet b)) - 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$p' = p|_{B' \cup E'}$$

donde  $A = \{e \in E \mid b \in e^\bullet \Rightarrow (b \in \text{Max}(N') \wedge \Delta(b) = \delta(p(e)) - 1)\}$ . □

En dicha definición, el conjunto  $A$  es el conjunto de eventos que han sido ejecutados en el instante anterior al instante en el que tenemos el proceso  $\pi$ . La idea que subyace en dicha definición es obtener un subproceso  $\pi'$  de  $\pi$  correspondiente a dicho instante anterior. Para ello se eliminan los eventos disparados en ese instante (eventos en  $A$ ), así como los lugares postcondición de dichos eventos, mientras que el resto de lugares maximales no minimales ven incrementado en una unidad el tiempo que queda para que termine la ejecución de la transición que los generó.

Obsérvese que esta definición es recursiva, lo que significa que hemos de comprobar que realmente estamos definiendo algo. Ahora bien, dado que estamos trabajando únicamente con procesos temporizados finitos, resulta inmediato comprobar que la aplicación de dicha definición recursiva nos termina conduciendo necesariamente al caso base, por lo que dicha definición es correcta.

**Teorema 9.6** Sea  $N = (S, T, F, \delta, M_0)$  una Red de Petri Ordinaria Temporizada en las condiciones de la definición 9.1 y  $\pi = (N', p)$  un proceso temporizado de  $N$ , con  $N' = (B, E, W, \Delta)$ .

Existe una secuencia de pasos temporizada  $\sigma$  compatible con  $\pi$ .

**Demostración:** Por inducción sobre la duración de  $\pi$ .

**CASO BASE:**

Si la duración de  $\pi$  es 0, entonces basta tomar la secuencia de pasos vacía:  $\sigma_0 = M_0$ , que es trivialmente compatible con  $\pi$ .

**CASO GENERAL:**

Supongamos ahora que  $\pi$  tiene duración  $i + 1$ , y sea  $\pi_i = (N'_i, p_i)$ , con  $N'_i = (B_i, E_i, W_i, \Delta_i)$ , el proceso  $\pi'$  obtenido a partir de  $\pi$  en el marco de la definición 9.4. Como  $D(\pi_i) = i$ , podemos aplicar la hipótesis de inducción y obtener una secuencia de pasos de longitud  $i$ ,  $\sigma_i = M_0[R_1] \dots M_{i-1}[R_i]M_i$ , compatible con  $\pi_i$ . Sea  $pos_i$  la función que establece dicha compatibilidad y sea  $Disp_i$  el conjunto de lugares maximales en  $\pi_i$  correspondientes a tokens disponibles (es decir, con anotación 0).

Definimos entonces el paso  $R_{i+1}$  por medio de

$$R_{i+1}(t) = |A \cap p^{-1}(t)|$$

donde  $A$  es el conjunto del mismo nombre introducido en la definición 9.4. Veamos que  $R_{i+1}$  está permitido bajo el marcaje  $M_i$ , es decir:

$$M_i^1(s) \geq \sum_{t \in s^*} R_{i+1}(t)$$

Sea  $s \in S$  y  $t \in s^*$ . Para cada  $e \in A \cap p^{-1}(t)$  se tiene  $b \in {}^*e \Rightarrow b \in \pi_i^* \wedge \Delta_i(b) = 0$ . De hecho, por definición de proceso existe un único  $b \in {}^*e$  tal que  $p_i(b) = s$ . Como  $\Delta_i(b) = 0$ ,  $b$  es un token disponible, es decir,  $b \in Disp_i$ , y por tanto:

$$|\bigcup_{t \in s^*} (A \cap p^{-1}(t))| \leq |p_i^{-1}(s) \cap Disp_i|$$

Aplicando el teorema 9.3 sobre el segundo miembro obtenemos

$$|p_i^{-1}(s) \cap Disp_i| = M_i^1(s)$$

y de ahí

$$|\bigcup_{t \in s^*} (A \cap p^{-1}(t))| \leq M_i^1(s)$$

Ahora bien, como los conjuntos  $A \cap p^{-1}(t)$  son disjuntos dos a dos, obtenemos que

$$|\bigcup_{t \in s^*} (A \cap p^{-1}(t))| = \sum_{t \in s^*} |A \cap p^{-1}(t)| = \sum_{t \in s^*} R_{i+1}(t)$$

Por tanto,  $R_{i+1}$  está permitido bajo el marcaje  $M_i$ . Sea entonces  $M_{i+1}$  el marcaje obtenido con su disparo. Obtenemos así una secuencia de pasos temporizada de longitud  $i + 1$ ,  $\sigma_{i+1} = M_0[R_1] \dots M_{i-1}[R_i]M_i[R_{i+1}]M_{i+1}$ . Esta secuencia de pasos es compatible con  $\pi$ , pues el proceso  $\pi$  se obtiene extendiendo  $\pi_i$  según la construcción del teorema 9.4.  $\square$

## 9.2 Bisimulación sobre Redes Temporizadas

En esta sección vamos a analizar la decidibilidad de la bisimulación y de la bisimulación preservando historias sobre Redes de Petri Temporizadas.

### Definición 9.5 (Sistema Etiquetado Temporizado)

Sea  $\Sigma$  un alfabeto finito, y sea  $\delta_\Sigma : \Sigma \longrightarrow \mathbb{N}^+$  una función que asocia duraciones enteras positivas a las acciones del alfabeto  $\Sigma$ . Un *sistema etiquetado temporizado* (SET) sobre  $\Sigma$  es una tupla  $N = (S, T, F, \delta, M_0, l)$ , donde  $l$  es un etiquetado de  $T$ ,  $l : T \longrightarrow \Sigma$  y  $\delta(t) = \delta_\Sigma(l(t))$ ,  $\forall t \in T$ , siendo  $(S, T, F, \delta, M_0)$  una Red de Petri Ordinaria Temporizada T-restrictiva Marcada.

Se dice que  $N$  es un sistema etiquetado *n-seguro* sii  $\forall M \in [M_0], M_1(s) \leq n, \forall s \in S$ .  $\square$

**Definición 9.6** Sea  $\Sigma$  un alfabeto finito,  $N$  un SET sobre  $\Sigma$  y  $\pi = (N', p)$  un proceso temporizado de  $N$ . Se define la *estructura de eventos exenta de conflictos* asociada a  $\pi$  de la forma siguiente:

$$ev(\pi) = (E, \leq_{E \times E}, l \circ p|_E)$$

$\square$

### Definición 9.7 (Bisimulación en Sistemas Etiquetados Temporizados)

Sean  $N_1 = (S_1, T_1, F_1, \delta_1, M_{0,1}, l_1)$ ,  $N_2 = (S_2, T_2, F_2, \delta_2, M_{0,2}, l_2)$  SET n-seguros sobre un mismo alfabeto  $\Sigma$ . Una bisimulación para  $N_1, N_2$  es una relación  $\rho \subseteq [M_{0,1}] \times [M_{0,2}]$  tal que:

- (i)  $(M_{0,1}, M_{0,2}) \in \rho$
- (ii) Si  $(M_1, M_2) \in \rho$ , entonces:

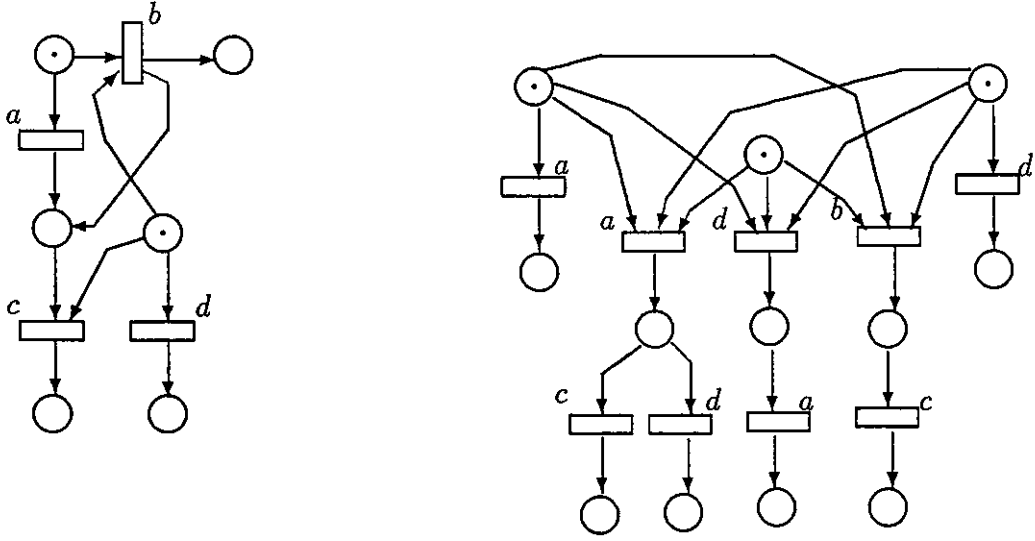


Figura 44: Dos SET bisimilares

- Para todo multiconjunto de transiciones sobre  $T_1$ ,  $R_1$ , tal que  $M_1[R_1]M'_1$  existe un multiconjunto  $R_2$  sobre  $T_2$  tal que  $M_2[R_2]M'_2$ , con  $(M'_1, M'_2) \in \rho$  y  $l_1(R_1) = l_2(R_2)$ .
- Para todo multiconjunto de transiciones sobre  $T_2$ ,  $R_2$ , tal que  $M_2[R_2]M'_2$  existe un multiconjunto  $R_1$  sobre  $T_1$  tal que  $M_1[R_1]M'_1$ , con  $(M'_1, M'_2) \in \rho$  y  $l_1(R_1) = l_2(R_2)$ .

La condición  $l_1(R_1) = l_2(R_2)$  hay que entenderla como una igualdad entre multiconjuntos. Esta igualdad implica que cada transición en  $R_1$  tiene asociada de forma unívoca una transición en  $R_2$  que tiene la misma acción como etiqueta, y por consiguiente, ambas transiciones tienen la misma duración.  $\square$

**Ejemplo 9.2** Los dos sistemas etiquetados de la figura 44 son bisimilares.  $\square$

**Proposición 9.1** Sea  $\Sigma$  un alfabeto finito, y dos SET  $n$ -seguros cualesquiera sobre  $\Sigma$ ,  $N_1$ ,  $N_2$ . Es decidible si  $N_1$  y  $N_2$  son bisimilares.

**Demostración:** Es inmediata, debido a que el conjunto de posibles marcajes es finito.  $\square$

**Definición 9.8** (Bisimulación Preservando Historias)

Sean  $N_1$ ,  $N_2$  SET sobre un mismo alfabeto  $\Sigma$ . Consideremos ternas de la forma

$(\pi_1, \pi_2, f)$ , donde  $\pi_1$  es un proceso temporizado de  $N_1$ ,  $\pi_2$  es un proceso temporizado de  $N_2$ ,  $f : ev(\pi_1) \rightarrow ev(\pi_2)$  es un isomorfismo entre estructuras de eventos exentas de conflictos, y  $\forall b_1 \in B_1, \bullet b_1 \neq \emptyset$  se tiene:  $\Delta_1(b_1) = \Delta_2(b_2)$ , siendo  $b_2 \in f(\bullet b_1)^\bullet$  (la elección del  $b_2$  es indiferente, pues  $\Delta_2$  ha de valer lo mismo para todo  $b_2 \in f(\bullet b_1)^\bullet$ ).

Entonces, un conjunto  $\mathcal{R}$  de ellas es una *bisimulación preservando historias* para  $N_1$  y  $N_2$  sii:

1.  $(\pi_0(N_1), \pi_0(N_2), \emptyset) \in \mathcal{R}$ .
2. Si  $(\pi_1, \pi_2, f) \in \mathcal{R}$ ,  $\pi_1 \xrightarrow{R_1}_p \pi'_1$ , para un multiconjunto de transiciones sobre  $T_1$ , entonces existen  $R_2, f', \pi'_2$ , tales que  $\pi_2 \xrightarrow{R_2}_p \pi'_2$ ,  $(\pi'_1, \pi'_2, f') \in \mathcal{R}$  y  $f'|_{ev(\pi_1)} = f$ .
3. Si  $(\pi_1, \pi_2, f) \in \mathcal{R}$ ,  $\pi_2 \xrightarrow{R_2}_p \pi'_2$ , para un multiconjunto de transiciones sobre  $T_2$ , entonces existen  $R_1, f', \pi'_1$ , tales que  $\pi_1 \xrightarrow{R_1}_p \pi'_1$ ,  $(\pi'_1, \pi'_2, f') \in \mathcal{R}$  y  $f'|_{ev(\pi_1)} = f$ .

Como  $f'$  es un isomorfismo y  $f'|_{ev(\pi_1)} = f$ , entonces  $f'$  se aplica biyectivamente entre los eventos correspondientes a  $R_1$  y los correspondientes a  $R_2$ , relacionando además eventos correspondientes a transiciones que tienen la misma etiqueta, y por tanto, la misma duración.  $\square$

Seguidamente vamos a estudiar la decidibilidad de la bisimulación preservando historias para sistemas etiquetados 1-seguros. Para ello comenzamos definiendo los *marcajes ordenados temporizados*.

**Definición 9.9** (Marcajes Ordenados Temporizados)

Sea  $N = (S, T, F, \delta, M_0, l)$  un SET 1-seguro sobre un alfabeto  $\Sigma$ . Un *marcaje ordenado temporizado* es una terna  $(M, \leq, \gamma)$ , donde:

- $M = (M_1, M_2)$ , con  $M_1 \subseteq S$  (marcaje actual) y  $M_2 \subseteq T \times \mathbb{N}^+$  (instancias de transiciones en ejecución con sus tiempos para terminar).
- $\leq \subseteq M_1 \times M_1$  (relación de precedencia entre los tokens).
- $\gamma : M_2 \rightarrow \mathcal{P}(M_1)$  ( $\gamma(t, n)$  son los tokens que serán menores o iguales que los que genere la transición  $t$  cuando acabe su ejecución).



Se define el *marcaje ordenado temporizado inicial* como sigue:

$$\text{init}(N) = (M_0, \leq_0, \gamma_0)$$

siendo  $M_0 = (M_0^1, \emptyset)$  el marcaje inicial,  $\leq_0 = M_0^1 \times M_0^1$  y  $\gamma_0 = \emptyset$ . □

**Definición 9.10** (Evolución de Marcajes Ordenados Temporizados)

Sea  $\Sigma$  un alfabeto finito,  $N$  un SET 1-seguro sobre  $\Sigma$ ,  $(M, \leq, \gamma)$  un marcaje ordenado temporizado de  $N$  y  $R$  un conjunto de transiciones permitido bajo  $M$ . Definimos el marcaje ordenado temporizado  $(M', \leq', \gamma')$  alcanzado tras el disparo de  $R$  como sigue:

- $M[R]M'$ .
- $\forall s, s' \in M'_1, s \leq' s'$  sii ocurre una de las siguientes condiciones:
  - $s, s' \in M_1, s, s' \notin \bullet R, s \leq s'$ .
  - $s, s' \in t^\bullet$ , con  $t \in R$ , tal que  $\delta(t) = 1$ .
  - $s \in M_1, s' \in t^\bullet$ , con  $t \in R$  tal que  $\delta(t) = 1$  y existe  $s'' \in \bullet t$  tal que  $s \leq s''$ .
  - $s' \in t^\bullet$  tal que  $(t, 1) \in M_2$ , y  $s \in \gamma(t, 1)$ .
  - $s, s' \in t^\bullet$ , con  $(t, 1) \in M_2$ .
- $\gamma'$  está definida por

$$\gamma'(t, n) = \begin{cases} \gamma(t, n+1) \cap M'_1 & \text{si } (t, n+1) \in M_2 \\ A & \text{si } t \in R, n = \delta(t) - 1 > 0 \end{cases}$$

siendo  $A = \{s \in M'_1 \mid s \in M_1 \wedge \exists s'' \in \bullet t, s \leq s''\}$ .

La demostración de que  $\leq'$  es un preorden requiere distinguir todos los casos posibles, siendo cada uno de ellos prácticamente inmediato. Esta evolución en un paso se representa en la forma  $(M, \leq, \gamma)[R](M', \leq', \gamma')$ . □

**Nota 9.1** En sistemas etiquetados temporizados 1-seguros no puede haber varias instancias de una misma transición en ejecución, aunque hayan comenzado en instantes diferentes. La razón es que si esto fuera posible, una secuencia de pasos válida sería una en la que esperaríamos a que las citadas instancias de la misma

transición terminasen su ejecución (es decir, no disparamos nada mientras tanto), con lo cual, como estamos trabajando con redes T-restrictivas, nos encontraríamos con al menos un lugar que no cumpliría la condición de 1-seguridad.  $\square$

**Definición 9.11** Sea  $\Sigma$  un alfabeto finito,  $N = (S, T, F, \delta, M_0, l)$  un SET 1-seguro sobre  $\Sigma$ ,  $\pi = (N', p)$  un proceso temporizado de  $N$  y  $(M, \leq, \gamma)$  un marcaje ordenado temporizado de  $N$ . Se dice que  $init(N)[\pi](M, \leq, \gamma)$  sii:

1.  $\forall s \in S : |p^{-1}(s) \cap \pi^* \cap \Delta^{-1}(0)| = M_1(s)$ , siendo  $M = (M_1, M_2)$ .
2.  $\forall t \in T, \forall n \in \mathbb{N}^+, |E(t, n)| = M_2(t, n)$ , siendo  $M_2(t, n) = 1$ , si  $(t, n) \in M_2$ , y 0 en caso contrario, y  $E(t, n) = \{e \in E \mid p(e) = t \wedge (b \in e^* \Rightarrow b \in \pi^* \wedge \Delta(b) = n)\}$ .
3.  $\forall b, b' \in \pi^* \cap \Delta^{-1}(0)$  se tiene:  $p(b) \leq p(b')$  si y sólo si  $b \in {}^*\pi \vee (b, b' \notin {}^*\pi \wedge {}^*b \leq_\pi {}^*b')$
4.  $\forall (t, n) \in M_2, \forall s \in M_1 : s \in \gamma(t, n)$  si y sólo si  $b \in {}^*\pi \vee (b \notin {}^*\pi \wedge \exists e \in E(t, n)$  tal que  ${}^*b \leq_\pi e)$ , siendo  $b \in p^{-1}(s) \cap \pi^* \cap \Delta^{-1}(0)$ , que existe y es único por la primera condición de esta misma definición.

$\square$

**Teorema 9.7** Sea  $\Sigma$  un alfabeto finito,  $N = (S, T, F, \delta, M_0, l)$  un SET 1-seguro sobre  $\Sigma$ ,  $\pi = (N', p)$  un proceso temporizado de  $N$ ,  $(M, \leq, \gamma)$ ,  $(M', \leq', \gamma')$  marcajes ordenados temporizados de  $N$ , y  $R \subseteq T$  tales que  $init(N)[\pi](M, \leq, \gamma)$ . Entonces:  $(M, \leq, \gamma)[R](M', \leq', \gamma')$  sii  $\exists \pi' = (N'', p')$  proceso temporizado de  $N$  tal que  $\pi \xrightarrow{R}_p \pi'$ , e  $init(N)[\pi'](M', \leq', \gamma')$ .

**Demostración:**

$\Rightarrow$ : Para encontrar  $\pi'$  sólo necesitamos ver que disponemos de los lugares condición necesarios en  $\pi^*$  para conectarlos con los nuevos eventos correspondientes a las transiciones en  $R$ . Para ello consideremos  $t \in R$  y  $s \in {}^*t$ . Entonces, como  $t$  es disparable, ha de ocurrir que  $M_1(s) = 1$ . Ahora bien, por la condición 1 de la definición 9.11 tenemos:  $|p^{-1}(s) \cap \pi^* \cap \Delta^{-1}(0)| = 1$ . Entonces existe un único  $b(s) \in p^{-1}(s) \cap \pi^* \cap \Delta^{-1}(0)$ , que podemos conectar con el evento correspondiente a  $t$ .

Por tanto, existe un proceso  $\pi'$  tal que  $\pi \xrightarrow{R}_p \pi'$ . Además, por el teorema 9.6 sabemos que podemos asociar a  $\pi$  una secuencia de pasos temporizada compatible con él, y de hecho, su marcaje final será  $M$ , debido a las condiciones 1 y 2 de la definición 9.11. La extensión a  $\pi'$  se hace manteniendo la compatibilidad, por lo que

$$\begin{aligned} M'_1(s) &= |p'^{-1}(s) \cap \pi'^\bullet \cap \Delta'^{-1}(0)| \\ |E'(t, n)| &= M'_2(t, n), \quad \forall t \in T, \forall n \in \mathbb{N}^+ \end{aligned}$$

que son exactamente las dos primeras condiciones para que  $\text{init}(N)[\pi'](M', \leq', \gamma')$ .

Veamos la tercera condición: sean  $b, b' \in \pi'^\bullet \cap \Delta'^{-1}(0)$ . Pueden plantearse los siguientes casos posibles:

- $b, b' \in \pi^\bullet \cap \Delta^{-1}(0)$ .

En este caso  $p(b) \leq p(b')$  si y sólo si  $b \in \pi^\bullet \vee (b, b' \notin \pi^\bullet \wedge \bullet b \leq_\pi \bullet b')$ , lo que se traslada a  $\pi'$  de forma inmediata.

- $b, b' \in \pi^\bullet \cap \Delta^{-1}(1)$ .

En este caso,  $b, b' \notin \pi^\bullet$ , por lo que habrá que ver que en este caso  $p(b) \leq p(b')$  si y sólo si  $\bullet b \leq_\pi \bullet b'$ . Para ello consideramos  $s = p(b)$ ,  $s' = p(b')$ ,  $e \in \bullet b$ ,  $t = p(e)$ ,  $e' \in \bullet b'$  y  $t' = p(e')$ . Entonces, como  $\text{init}(N)[\pi](M, \leq, \gamma)$  tenemos (condición 2, def. 9.11)  $|E(t, 1)| = 1 = M_2(t, 1)$ ,  $|E(t', 1)| = 1 = M_2(t', 1)$ .

Si  $s \leq' s'$ , entonces como  $(t, 1) \in M_2$ ,  $(t', 1) \in M'_2$ , sólo puede ocurrir que  $s \leq' s'$  cuando  $s, s' \in \tilde{t}^\bullet$ , para algún  $\tilde{t} \in R$  (por definición de  $\leq'$ ). De ahí,  $t = \tilde{t} = t'$ , y  $e = e'$ .

Recíprocamente, si  $\bullet b \leq_\pi \bullet b'$ , entonces  $e \leq_\pi e'$ . En tal caso  $e = e'$ , pues en caso contrario existiría  $b'' \in e^\bullet$  tal que  $b'' < e'$ , con lo cual  $\Delta(b'') = 0$ , lo que implica que  $\Delta(b) = 0$ , contradiciendo la hipótesis de partida.

- $b \in \pi^\bullet \cap \Delta^{-1}(0)$ ,  $b' \in \pi^\bullet \cap \Delta^{-1}(1)$ .

Sean  $s = p(b)$  y  $s' = p(b')$ . Como  $\Delta(b') = 1$ , entonces  $b' \notin \pi^\bullet$ , y por tanto existe  $e' \in \bullet b'$ . Sea  $p(e') = t'$ . Si  $\bullet b = \emptyset$  habríamos terminado. Supongamos entonces que existe  $e \in \bullet b$  y sea  $t = p(e)$ . Tenemos que  $(t', 1) \in M_2$ , aplicando el mismo razonamiento realizado en el caso anterior.

Si  $s \leq' s'$ , entonces, dado que  $(t', 1) \in M_2$ , por la definición de  $\leq'$  concluimos que  $s \in \gamma(t', 1)$ . En este caso, por la condición 4 de la definición 9.11,  $\tilde{b} \in \pi^\bullet \vee (\tilde{b} \notin \pi^\bullet \wedge \exists \tilde{e} \in E(t', 1), \bullet b \leq_\pi \tilde{e})$ , con  $\{\tilde{b}\} = p^{-1}(s) \cap \pi^\bullet \cap \Delta^{-1}(0)$ . Entonces, como  $b \in p^{-1}(s) \cap \pi^\bullet \cap \Delta^{-1}(0)$ , tenemos que  $\tilde{b} = b$ , y como  $b \notin \pi^\bullet$ , ha de existir un  $\tilde{e}$  en esas condiciones. Ahora bien,  $\tilde{e}$  es tal que  $p(\tilde{e}) = t'$ , y  $\forall b \in \tilde{e}^\bullet : b \in \pi^\bullet \wedge \Delta(b) = 1$ . En particular,  $e'$  cumple dicha condición.

Veamos por otra parte que  $|E(t', 1)| \leq 1$ . En efecto, si existieran  $e_1, e_2 \in E(t', 1)$ , tendríamos  $p(e_1) = p(e_2) = t'$ , y  $\forall b_1 \in e_1^\bullet, \forall b_2 \in e_2^\bullet : \Delta(b_1) = \Delta(b_2) = 1$ . Esto implica que en cualquier secuencia de pasos temporizada compatible con  $\pi$  tenemos que ambos eventos corresponden al mismo paso, lo que es absurdo, pues ambos eventos corresponden a la misma transición, y estamos trabajando sobre redes 1-seguras.

En consecuencia,  $\tilde{e} = e'$  y  $\tilde{b} = b$ , de modo que  $b \notin \pi^\bullet \wedge \bullet b \leq_\pi e'$ .

Recíprocamente, supongamos en primer lugar que  $\bullet b = \emptyset$ . Sabemos que  $(t', 1) \in M_2$  y  $s \in \gamma(t', 1)$  (por ser token inicial). Por tanto, por definición de  $\leq'$ ,  $s \leq' s'$ .

Supongamos entonces que  $b, b' \notin \pi^\bullet \wedge \bullet b \leq_\pi \bullet b'$ . Por la condición 4 de la definición 9.11 aplicada sobre  $\pi$  tenemos que  $s \in \gamma(t', 1)$ , pues el evento  $e'$  cumple las condiciones requeridas. Entonces, por definición de  $\leq'$  se tiene:  $s \leq' s'$ .

-  $b \in \pi^\bullet \cap \Delta^{-1}(1), b' \in \pi^\bullet \cap \Delta^{-1}(0)$ .

En este caso ha de ocurrir que  $\bullet b \neq \emptyset$ , pues  $\Delta(b) = 1$ . Siguiendo un razonamiento análogo al utilizado en el caso anterior, aunque aplicado en este caso a  $b$  en lugar de  $b'$ , podemos concluir que  $(t, 1) \in M_2$ .

Si  $s \leq' s'$ , de la definición de  $\leq'$  concluimos que  $s' \in t^\bullet$  (pues  $(t, 1) \in M_2$ ), lo que implica  $\Delta(b') = 1$  (pues ambos serían postcondición del mismo evento), que contradice la hipótesis de partida. Tampoco puede ocurrir  $\bullet b = \emptyset$ , ni  $\bullet b \leq_\pi \bullet b'$  pues  $\Delta(b) = 1$ .

Por tanto, se trata de un caso imposible.

- $b, b' \notin \pi^\bullet$ .

En este caso, ambos lugares han debido ser generados por el disparo de  $R$ , y  $s \leq' s'$  sii  $s, s' \in t^\bullet$ , para algún  $t \in R$  tal que  $\delta(t) = 1$ . Entonces es claro que  $\bullet b \leq_{\pi'} \bullet b'$ .

Para el recíproco basta tener en cuenta que  $\bullet b = \bullet b'$ , pues ambos no están en  $\pi^\bullet$ , y como  $\Delta'(b) = \Delta'(b') = 0$ , entonces han debido ser generados por el disparo de una misma transición en  $R$  con duración 1. En consecuencia, aplicando la definición de  $\leq'$  se tiene  $s \leq' s'$ .

- $b \in \pi^\bullet \cap \Delta^{-1}(0)$ ,  $b' \notin \pi^\bullet$ .

En este caso,  $s' \in t^\bullet$ ,  $t \in R$ ,  $\delta(t) = 1$ . Si  $s \leq' s'$ , entonces por definición de  $\leq'$  ha de existir  $s'' \in \bullet t$  tal que  $s \leq s''$ . Sea entonces  $b'' \in p^{-1}(s'') \cap \pi^\bullet \cap \Delta^{-1}(0)$ , que existe por ser  $M_1(s'') = 1$ . Entonces  $s \leq s'' \Rightarrow b \in \bullet \pi \vee (b, b'' \notin \bullet \pi \wedge \bullet b \leq_{\pi} \bullet b'')$ .

De ahí, si  $\bullet b = \emptyset$  habríamos terminado, y en caso contrario, como  $b'' \leq_{\pi'} b'$ , tenemos  $\bullet b \leq_{\pi'} \bullet b'$ , como queríamos demostrar.

Recíprocamente, si  $\bullet b = \emptyset \vee (\bullet b \leq_{\pi} \bullet b')$ , entonces  $p'(b) \leq' p'(b')$ . Para demostrarlo consideremos  $e' \in \bullet b'$  y  $b'' \in \bullet e'$ . Entonces  $\Delta(b'') = 0$ , y por la condición 3 de la definición 9.11 aplicada sobre  $\pi$  concluimos que  $p(b) \leq p(b'')$ . De ahí, por definición de  $\leq'$ ,  $s \leq' s'$ , pues  $p'(b'') = s''$  es un token consumido por  $p'(e')$  tal que  $s \leq s''$ .

- $b \notin \pi^\bullet$ ,  $b' \in \pi^\bullet \wedge \Delta^{-1}(0)$ .

En este caso,  $\bullet b \neq \emptyset$ , y  $\exists e \in \bullet b$ , con  $\delta(t) = 1$ , para  $t = p'(e)$ , por definición de  $\Delta'$ .

Si  $s \leq' s'$ , por definición de  $\leq'$  tendría que ocurrir que  $s' \in t^\bullet$ , lo que es absurdo, pues  $b' \in \pi^\bullet$ . Así pues, este caso no puede darse. Tampoco puede ocurrir que  $\bullet b \leq_{\pi'} \bullet b'$ , pues  $b$  ha sido generado en el último paso.

- $b \in \pi^\bullet \cap \Delta^{-1}(1)$ ,  $b' \notin \pi^\bullet$ .

Repitiendo el razonamiento utilizado en el segundo caso concluimos que existe  $e \in \bullet b$ ,  $p(e) = t$ ,  $(t, 1) \in M_2$ . Además,  $b'$  ha debido ser generado por

una transición  $t' = p'(e')$ . Entonces no puede ocurrir que  $s \leq' s'$ , según la definición de  $\leq'$ . Tampoco es posible que  $\bullet b \leq_{\pi'} \bullet b'$ , pues eso implicaría que  $\Delta(b) = 0$ , lo que es absurdo. Además,  $\bullet b \neq \emptyset$ , pues  $\Delta(b) = 1$ . En consecuencia, este caso tampoco puede darse.

- $b \notin \pi^*$ ,  $b' \in \pi^* \cap \Delta^{-1}(1)$ .

Tenemos  $e \in \bullet b$ ,  $p'(e) = t$ ,  $\delta(t) = 1$ , y  $e' \in \bullet b'$ ,  $p(e') = t'$ ,  $(t', 1) \in M_2$ . De nuevo en este caso no puede ocurrir que  $s \leq' s'$ . Tampoco puede ocurrir que  $\bullet b = \emptyset$ , pues  $b \notin \pi^*$ , ni tampoco que  $\bullet b \leq_{\pi'} \bullet b'$ , pues  $b$  ha sido generado en el último paso, y  $b'$  no.

Sólo queda por demostrar la última condición. Sean al respecto  $(t, n) \in M'_2$ , y  $s \in M'_1$ . Si  $s \in \gamma'(t, n)$ , entonces según la definición de  $\gamma'$  esto sólo puede suceder por una de las dos causas siguientes:

- $(t, n+1) \in M_2$  y  $s \in M'_1 \cap \gamma(t, n+1)$
- $s \in A$ , para  $t \in R$ ,  $n = \delta(t) - 1 > 0$

En el primer caso, por la definición 9.11 aplicada a  $\pi$  tenemos que  $b \in \bullet \pi \vee (b \notin \bullet \pi \wedge \exists e \in E(t, n+1), \bullet b \leq_{\pi} e)$ , con  $b \in p^{-1}(s) \cap \pi^* \cap \Delta^{-1}(0)$ . Si  $b \in \bullet \pi$  ya lo tendríamos, en caso contrario,  $e \in E'(t, n)$ , por definición de  $\Delta'$ .

En el segundo caso,  $s \in M'_1$ ,  $s \in M_1$  y  $\exists s'' \in \bullet t$  tal que  $s \leq s''$ . Entonces,  $M_1(s'') = 1 \Rightarrow \exists b'' \in p^{-1}(s'') \cap \pi^* \cap \Delta^{-1}(0)$ . Análogamente,  $s \in M_1 \Rightarrow \exists b \in p^{-1}(s) \cap \pi^* \cap \Delta^{-1}(0)$ , y entonces  $p(b) \leq p(b'')$  implica (por la definición 9.11 aplicada a  $\pi$ ) que  $\bullet b = \emptyset \vee \bullet b \leq_{\pi} \bullet b''$ .

De nuevo podemos centrarnos en el caso  $\bullet b \leq_{\pi} \bullet b''$ . Entonces tenemos  $\bullet b \leq_{\pi'} e'$ , donde  $e'$  es el evento asociado a  $t$  tal que  $e' \in b''^*$ . Además,  $e' \in E'(t, \delta(t) - 1)$ , por definición de  $\Delta'$ .

Recíprocamente, si  $b \in \bullet \pi'$ , entonces  $\bullet b = \emptyset$ . Sea  $p(b) = s \in M'_1$ . Queremos ver que  $s \in \gamma'(t, n)$ ,  $\forall n \leq \delta(t) - 1$ . Si  $n \neq \delta(t) - 1$  entonces el resultado se obtiene a partir de la definición 9.11 aplicada sobre  $\pi$ , teniendo en cuenta que  $b \in \bullet \pi$  y aplicando la definición de  $\gamma'$ . Si  $n = \delta(t) - 1$ , consideremos el evento  $e$  asociado a  $t$ , y sea  $b' \in \bullet e$ . Tenemos que  $s \in M_1$ , pues  $b \in \bullet \pi'$ . Entonces  $p(b') = s'$  es un token consumido por  $t$ , y como  $b \in \bullet \pi$  tenemos  $p(b) \leq p(b')$  (por la definición 9.11 aplicada sobre  $\pi$ ). Así  $s \leq s'$ , y  $s' \in \bullet t$ . Por tanto,  $s \in A$ , es decir,  $s \in \gamma'(t, \delta(t) - 1)$ .

Si  $b \notin \bullet\pi'$ , y  $\bullet b \leq_{\pi'} e$ , con  $e \in E'(t, n)$ , hemos de distinguir dos casos:

- Si  $n \neq \delta(t) - 1$ , entonces  $e \in E(t, n + 1)$ , por la definición de  $E'(t, n)$ . Por otra parte,  $\bullet b \leq_{\pi'} e \Rightarrow \bullet b \leq_{\pi} e$ , con lo que aplicando la definición 9.11 sobre  $\pi$  obtenemos  $s \in \gamma(t, n + 1)$ , de modo que  $s \in \gamma'(t, n)$ .
- Si  $n = \delta(t) - 1$ , entonces  $e$  corresponde a una transición disparada en  $R$ :  $p'(e) = t \in R$ . Tenemos  $p'(b) = s$ ,  $\bullet b \leq_{\pi'} e$ . Si  $\bullet b = e$ , como  $b \in p'^{-1}(s) \cap \pi^{\bullet} \cap \Delta'^{-1}(0)$ , entonces  $\Delta'(b) = 0$ , lo que implica que  $\delta(t) - 1 = 0$ , lo que nos lleva a  $n = 0$ , que es absurdo.

Por tanto,  $\bullet b <_{\pi'} e$ , y de ahí  $s \in M_1$ , pues  $\Delta(b)$  ha de ser 0, y podemos aplicar la condición 1 de la definición 9.11 sobre  $\pi$ .

Sea  $b'' \in \bullet e$  tal que  $\bullet b <_{\pi} b''$ ;  $p(b'')$  es un token consumido por  $t$ , y entonces  $\Delta(b'') = 0$ . Como  $\bullet b \leq_{\pi} b''$  concluimos que  $p(b) \leq p(b'')$ , por lo que aplicando la definición de  $A$ ,  $s \in A$ , y por tanto,  $s \in \gamma'(t, \delta(t) - 1)$ .

$\Leftarrow$ : Tenemos ahora  $\pi \xrightarrow{R}_p \pi'$ ,  $init(N)[\pi](M, \leq, \gamma)$ ,  $init(N)[\pi'](M', \leq', \gamma')$ .

Por las condiciones 1 y 2 de la definición 9.11 aplicada sobre  $\pi$  y  $\pi'$  se obtiene que  $M$  y  $M'$  son marcajes alcanzables. En particular,  $M$  corresponde al marcaje final de una secuencia de pasos temporizada  $\sigma$  compatible con  $\pi$ . En base a la extensión de  $\pi$  a  $\pi'$  por  $R$ , concluimos que la extensión de la secuencia  $\sigma$  mediante  $R$  es una secuencia  $\sigma'$  compatible con  $\pi'$ , cuyo marcaje final será  $M'$ . Por tanto,  $M[R]M'$ .

Sea entonces  $(M, \leq, \gamma)[R](M', \leq'_1, \gamma'_1)$ . Tenemos que demostrar que  $\leq'_1 = \leq'$  y que  $\gamma'_1 = \gamma'$ .

Sean  $s, s' \in M'_1$ ,  $s \leq'_1 s'$ . Entonces pueden darse los siguientes casos:

- $s, s' \in M_1$ ,  $s, s' \notin \bullet R$ ,  $s \leq s'$ . En este caso, sean  $b \in p^{-1}(s) \cap \pi^{\bullet} \cap \Delta^{-1}(0)$ ,  $b' \in p^{-1}(s') \cap \pi^{\bullet} \cap \Delta^{-1}(0)$ . Tenemos  $p(b) \leq p(b')$ , y de ahí,  $b \in \bullet\pi \vee (b, b' \notin \bullet\pi \wedge \bullet b \leq_{\pi} \bullet b')$ . Esto se traslada a  $\pi'$  repitiéndose el razonamiento hacia atrás, concluyendo  $p'(b) \leq' p'(b')$ .
- $s, s' \in t^{\bullet}$ ,  $t \in R$ ,  $\delta(t) = 1$ . Sean entonces  $b \in p'^{-1}(s) \cap \pi'^{\bullet} \cap \Delta'^{-1}(0)$ ,  $b' \in p'^{-1}(s') \cap \pi'^{\bullet} \cap \Delta'^{-1}(0)$ , que existen pues  $M'_1(s) = 1$ ,  $M'_1(s') = 1$ . Entonces  $\bullet b = \bullet b'$ , por lo que podemos aplicar la condición 3 de la definición 9.11 para obtener  $p'(b) \leq' p'(b')$ .

-  $s \in M_1, s' \in t^*, t \in R, \delta(t) = 1, \exists s'' \in \bullet t$  tal que  $s \leq s''$ . Sean  $b \in p^{-1}(s) \cap \pi^* \cap \Delta^{-1}(0)$ ,  $b'' \in p^{-1}(s'') \cap \pi^* \cap \Delta^{-1}(0)$ . Entonces,  $p(b) \leq p(b'') \Rightarrow \bullet b = \emptyset \vee (b, b'' \notin \bullet \pi \wedge \bullet b \leq_\pi \bullet b'')$ . Si  $\bullet b = \emptyset$ , entonces se aplica en sentido inverso la condición 3 de la definición 9.11 para obtener  $p'(b) \leq' p'(b')$ , siendo  $b' \in p'^{-1}(s') \cap \pi'^* \cap \Delta'^{-1}(0)$ . Si no, como  $\bullet b \leq_\pi \bullet b''$ , y  $\bullet b'' \leq_{\pi'} \bullet b'$ , tenemos  $\bullet b \leq_{\pi'} \bullet b'$ , por lo que aplicando de nuevo la citada condición 3 de la definición 9.11, obtenemos  $p'(b) \leq' p'(b')$ .

-  $s' \in t^*, (t, 1) \in M_2, s \in \gamma(t, 1)$ . Sea  $b' \in p'^{-1}(s') \cap \pi'^* \cap \Delta'^{-1}(0)$ . Como  $s \in \gamma(t, 1) \Rightarrow b \in \bullet \pi \vee (b \notin \bullet \pi \wedge \exists e \in E(t, 1) : \bullet b \leq_\pi e)$ , siendo  $b \in p^{-1}(s) \cap \pi^* \cap \Delta^{-1}(0)$ .

Si  $b \in \bullet \pi$  se aplica en sentido inverso la condición 3 de la definición 9.11 para  $\pi'$  y se obtiene  $p'(b) \leq' p'(b')$ . En caso contrario, como  $b' \in e^*$  se tiene  $\bullet b \leq_{\pi'} \bullet b'$ , y de ahí, aplicando de nuevo la condición 3 en sentido inverso concluimos  $p'(b) \leq' p'(b')$ .

-  $s, s' \in t^*, (t, 1) \in M_2$ . En este caso, sean  $b \in p'^{-1}(s) \cap \pi'^* \cap \Delta'^{-1}(0)$ ,  $b' \in p'^{-1}(s') \cap \pi'^* \cap \Delta'^{-1}(0)$ . Si  $\bullet b = \emptyset$  concluimos aplicando la definición 9.11. En caso contrario, se tiene  $\bullet b = \bullet b'$ , para aplicarse una vez más la condición 3 citada.

Consideremos ahora  $s, s' \in M'_1$ , tales que  $s \leq' s'$ . Sean  $b \in p'^{-1}(s) \cap \pi'^* \cap \Delta'^{-1}(0)$ ,  $b' \in p'^{-1}(s') \cap \pi'^* \cap \Delta'^{-1}(0)$ . Entonces  $p'(b) \leq' p'(b') \Rightarrow \bullet b = \emptyset \vee (b, b' \notin \bullet \pi' \wedge \bullet b \leq_{\pi'} \bullet b')$ . Hemos de distinguir entonces los siguientes casos:

-  $b, b' \in \pi^* \cap \Delta^{-1}(0)$ .

Basta usar  $\bullet b = \emptyset \vee (b, b' \notin \bullet \pi \wedge \bullet b \leq_\pi \bullet b')$  sobre  $\pi$ , obteniéndose  $s \leq s'$ . Entonces, como se trata de tokens no consumidos, por definición de  $\leq'_1$  se tiene:  $s \leq'_1 s'$ .

-  $b, b' \in \pi^* \cap \Delta^{-1}(1)$ .

Sean  $e \in \bullet b, e' \in \bullet b'$ . Tenemos  $p(e) = t, p(e') = t', (t, 1) \in M_2, (t', 1) \in M_2$ . De ahí, como  $e \leq_{\pi'} e'$ , sólo puede ocurrir que  $e = e'$ , pues  $\Delta(b) = \Delta(b') = 1$ . Por tanto,  $t = t'$ , con lo cual aplicando la definición de  $\leq'_1$  se obtiene:  $s \leq'_1 s'$ .



- $b \in \pi^\bullet \cap \Delta^{-1}(0)$ ,  $b' \in \pi^\bullet \cap \Delta^{-1}(1)$ .

Sea  $e' \in \bullet b'$ ,  $p(e') = t'$ . Tenemos  $(t', 1) \in M_2$ . Para demostrar que  $s \leq'_1 s'$  hemos de ver (def. de  $\leq'_1$ ) que  $s \in \gamma(t', 1)$ . Para ello usamos la condición 4 de la definición 9.11 sobre  $\pi$ , pues si  $\bullet b = \emptyset$  ya tendríamos lo deseado, y si no, de  $\bullet b \leq_{\pi'} \bullet b'$ , obtenemos  $\bullet b \leq_{\pi} e'$ . Además,  $e' \in E(t', 1)$ , y de ahí,  $s \in \gamma(t', 1)$ .

- $b \in \pi^\bullet \cap \Delta^{-1}(1)$ ,  $b' \in \pi^\bullet \cap \Delta^{-1}(0)$ .

Sea  $e \in \bullet b$ ,  $p(e) = t$ ,  $(t, 1) \in M_2$ . Tal caso no puede darse pues  $\bullet b \leq_{\pi'} \bullet b'$  no puede ocurrir cuando  $\Delta(b) = 1$ .

- $b, b' \notin \pi^\bullet$ .

En este caso,  $b$  y  $b'$  corresponden a tokens generados por el disparo de  $R$ . Además, como  $\bullet b \leq_{\pi'} \bullet b'$ , tenemos  $\bullet b = \bullet b'$ , y por tanto ambos han sido generados por la misma transición. En tal caso, aplicando la definición de  $\leq'_1$  concluimos  $s \leq'_1 s'$ .

- $b \in \pi^\bullet \cap \Delta^{-1}(0)$ ,  $b' \notin \pi^\bullet$ .

Como  $\Delta'(b') = 0$ , y  $b' \notin \pi^\bullet$ , tenemos  $s' = p'(b') \in t'^\bullet$ , con  $t' \in R$ ,  $\delta(t') = 1$ . Si  $\bullet b \neq \emptyset$ , consideremos  $e \in \bullet b$ ,  $e' \in \bullet b'$  y  $b'' \in \bullet e'$  tales que  $e \leq \bullet b''$ . Entonces  $\bullet b \leq_{\pi} \bullet b''$ , y por tanto  $s \leq s''$ , para  $s'' = p(b'')$ . Por lo que, por definición de  $\leq'_1$ ,  $s \leq'_1 s'$ .

Si  $\bullet b = \emptyset$ , sea  $b'' \in \bullet e'$ , para  $e' \in \bullet b'$ , que existe por ser  $b' \notin \pi^\bullet$ . Entonces, por la condición 3 de la definición 9.11 se tiene  $s \leq s''$ , con  $s'' = p(b'')$ , y de ahí, por definición de  $\leq'_1$ ,  $s \leq'_1 s'$ .

- $b \notin \pi^\bullet$ ,  $b' \in \pi^\bullet \wedge \Delta^{-1}(0)$ .

Este caso no puede ocurrir, pues no puede darse  $\bullet b = \emptyset$ , ni  $\bullet b \leq_{\pi'} \bullet b'$ .

- $b \in \pi^\bullet \cap \Delta^{-1}(1)$ ,  $b' \notin \pi^\bullet$ .

Por la misma razón que en el caso anterior tampoco puede darse este caso.

- $b \notin \pi^\bullet$ ,  $b' \in \pi^\bullet \cap \Delta^{-1}(1)$ .

Tampoco este caso puede ocurrir, pues  $b$  ha sido generado en el último paso, mientras que  $b'$  no. Por tanto, de nuevo no puede darse  $\bullet b = \emptyset$ , ni  $\bullet b \leq_{\pi'} \bullet b'$ .

Veamos ahora que  $\gamma' = \gamma'_1$ . Tomemos al efecto  $(t, n) \in M'_2$  y  $s \in M'_1$  y empecemos suponiendo que  $n < \delta(t) - 1$ . Entonces  $s \in \gamma'(t, n) \Rightarrow b \in \pi' \vee (b \notin \pi' \wedge \exists e \in E'(t, n) \text{ tal que } \bullet b \leq_{\pi'} e)$ , con  $\{b\} = p'^{-1}(s) \cap \pi'^{\bullet} \cap \Delta'^{-1}(0)$ .

Si  $b \in \pi'$ , entonces  $b \in \pi$ , por lo que  $\Delta(b) = 0$ . Por tanto,  $s \in M_1$ , y de ahí,  $s \in \gamma(t, n+1)$ . En consecuencia, por la definición de  $\gamma'_1$ ,  $s \in \gamma'_1(t, n)$ .

Si  $\exists e \in E'(t, n)$  tal que  $\bullet b \leq_{\pi'} e$ , entonces  $e \in E(t, n+1)$ , por definición de  $E'$ , y de ahí,  $s \in \gamma(t, n+1)$ , y por tanto  $s \in \gamma'_1(t, n)$ .

Supongamos ahora que  $n = \delta(t) - 1$ . Entonces, si  $s \in \gamma'(t, \delta(t) - 1)$  es porque de nuevo  $b \in \pi' \vee (b \notin \pi' \wedge \exists e \in E'(t, \delta(t) - 1) \text{ tal que } \bullet b \leq_{\pi'} e)$ .

Si  $b \in \pi'$ , entonces  $b \in \pi$ , y de ahí,  $s \in M_1$ . Para  $s' \in \pi'$ , del hecho de que  $\bullet b = \emptyset$  se sigue  $s \leq s'$  (cond. 3 de la definición 9.11). En consecuencia, por definición de  $\gamma'_1$ ,  $s \in \gamma'_1(t, \delta(t) - 1)$ .

Si  $b \notin \pi'$ ,  $\bullet b \leq_{\pi'} e$ , entonces  $\bullet b \neq e$ , pues en caso contrario tendríamos  $\Delta'(b) = \delta(t) - 1 = n > 0$ . Por tanto, existe  $b'' \in \pi$  tal que  $\bullet b \leq_{\pi} b''$ . De ahí, como  $\Delta(b'') = 0$ , aplicando la condición 3 de la definición 9.11 tenemos  $p(b) \leq p(b'')$ , y por tanto,  $s \in \gamma'_1(t, \delta(t) - 1)$ .

Recíprocamente, sea  $s \in M'_1$ , con  $s \in \gamma'_1(t, n)$ . Supongamos de nuevo en primer lugar que  $n < \delta(t) - 1$ . Entonces, por definición de  $\gamma'_1$ ,  $s \in \gamma(t, n+1) \cap M'_1$ . De ahí,  $b \in \pi \vee (b \notin \pi \wedge \exists e \in E(t, n+1), \bullet b \leq_{\pi} e)$ . La definición de  $E'$  da lugar a que  $e \in E'(t, n)$ , y de ahí,  $s \in \gamma'(t, n)$ .

Si  $n = \delta(t) - 1$ , entonces  $\exists s' \in \pi'$ , tal que  $s \leq s'$ . Entonces,  $b' \in p^{-1}(s') \cap \pi'^{\bullet} \cap \Delta'^{-1}(0)$  es tal que  $p(b) \leq p(b')$ , y de ahí,  $\bullet b = \emptyset \vee (b, b' \notin \pi \wedge \bullet b \leq_{\pi} b')$ .

Por tanto, el evento  $e$  asociado a  $t$  es tal que  $e \in E'(t, \delta(t) - 1)$ , y  $\bullet b \leq_{\pi'} e$ , por lo que  $s \in \gamma'(t, \delta(t) - 1)$ .  $\square$

Este teorema garantiza que la definición de  $\text{init}(N)[\pi](M, \leq, \gamma)$  es coherente con la evolución de marcajes ordenados.

### Definición 9.12 (TOM-bisimulación)

Sea  $\Sigma$  un alfabeto finito,  $N_1 = (S_1, T_1, F_1, \delta_1, M_{0,1}, l_1)$ ,  $N_2 = (S_2, T_2, F_2, \delta_2, M_{0,2}, l_2)$  SET 1-seguros. Una *TOM-bisimulación* para  $N_1$  y  $N_2$  es una relación  $\mathcal{B} \subseteq OM(N_1) \times OM(N_2) \times \mathcal{P}(S_1 \times S_2)$  tal que

1.  $(\text{init}(N_1), \text{init}(N_2), M_{0,1}^1 \times M_{0,2}^1) \in \mathcal{B}$ , con  $M_{0,1} = (M_{0,1}^1, \emptyset)$ ,  $M_{0,2} = (M_{0,2}^1, \emptyset)$ .

2. Si  $((M_1, \leq_1, \gamma_1), (M_2, \leq_2, \gamma_2), \beta) \in \mathcal{B}$ , entonces

- Existe una biyección  $\mu : M_1^2 \longrightarrow M_2^2$ , siendo  $M_1 = (M_1^1, M_1^2)$ ,  $M_2 = (M_2^1, M_2^2)$ , tal que  $\forall (t_1, n) \in M_1^2 : \mu(t_1, n) = (t_2, n)$ , para un  $t_2 \in T_2$  tal que  $l_1(t_1) = l_2(t_2)$ .
- $\forall (t_1, n) \in M_1^2, \forall s_1 \in \gamma_1(t_1, n), \forall s_2 \in M_2^1, (s_1, s_2) \in \beta \Rightarrow s_2 \in \gamma_2(t_2, n)$ , siendo  $(t_2, n) = \mu(t_1, n)$ .
- $\forall (t_2, n) \in M_2^2, \forall s_2 \in \gamma_1(t_2, n), \forall s_1 \in M_1^1, (s_1, s_2) \in \beta \Rightarrow s_1 \in \gamma_1(t_1, n)$ , siendo  $(t_1, n) = \mu^{-1}(t_2, n)$ .

3. Si  $((M_1, \leq_1, \gamma_1), (M_2, \leq_2, \gamma_2), \beta) \in \mathcal{B}$ , y  $(M_1, \leq_1, \gamma_1)[R_1](M'_1, \leq'_1, \gamma'_1)$ , para  $R_1 \subseteq T_1$ , entonces existen  $R_2 \subseteq T_2$ , una biyección  $\psi : R_1 \longrightarrow R_2$ , y  $(M'_2, \leq'_2, \gamma'_2)$  tales que

- $(M_2, \leq_2, \gamma_2)[R_2](M'_2, \leq'_2, \gamma'_2), ((M'_1, \leq'_1, \gamma'_1), (M'_2, \leq'_2, \gamma'_2), \beta') \in \mathcal{B}, \forall t_1 \in R_1, l_1(t_1) = l_2(\psi(t_1))$  y  $\mu'$  cumple:

$$\mu'(t_1, n) = \begin{cases} (\psi(t_1), n) & \text{si } t_1 \in R_1 \wedge n = \delta_1(t_1) - 1 \\ (t_2, n) & \text{en caso contrario, siendo} \\ & \mu(t_1, n+1) = (t_2, n+1) \end{cases}$$

- $\forall t_1 \in R_1, \forall s_1 \in \bullet t_1 \exists s'_1 \in \bullet t_1$  y  $\exists s'_2 \in \bullet \psi(t_1)$ , tales que  $s_1 \leq_1 s'_1, (s'_1, s'_2) \in \beta$ .
- $\forall t_2 \in R_2, \forall s_2 \in \bullet t_2 \exists s'_2 \in \bullet t_2$  y  $\exists s'_1 \in \bullet \psi^{-1}(t_2)$ , tales que  $s_2 \leq_2 s'_2, (s'_1, s'_2) \in \beta$ .

estando  $\beta'$  definido como sigue:  $\forall s_1 \in M_1^1, \forall s_2 \in M_2^1$ , con  $M'_1 = (M_1^1, M_1^2)$ ,  $M'_2 = (M_2^1, M_2^2) : (s_1, s_2) \in \beta'$  sii ocurre una de las condiciones siguientes:

- $s_1 \in M_1^1, s_2 \in M_2^1, s_1 \notin \bullet R_1, s_2 \notin \bullet R_2$  y  $(s_1, s_2) \in \beta$ .
- $s_1 \in t_1^\bullet, t_1 \in R_1, \delta_1(t_1) = 1, s_2 \in \psi(t_1)^\bullet$ .
- $s_1 \in t_1^\bullet, (t_1, 1) \in M_1^2, s_2 \in t_2^\bullet, (t_2, 1) \in M_2^2, (t_2, 1) = \mu(t_1, 1)$ .

4. Análoga a la 3, intercambiando los papeles entre  $N_1$  y  $N_2$ .

□

**Definición 9.13** Sea  $\Sigma$  un alfabeto finito,  $N_1 = (S_1, T_1, F_1, \delta_1, M_{0,1}, l_1)$ ,  $N_2 = (S_2, T_2, F_2, \delta_2, M_{0,2}, l_2)$  SET 1-seguros sobre  $\Sigma$  y  $\mathcal{B}$  una TOM-bisimulación para ellos. Se dice que  $((M'_1, \leq'_1, \gamma'_1), (M'_2, \leq'_2, \gamma'_2), \beta') \in \mathcal{B}$  es *alcanzable* sii se verifica una de las condiciones siguientes:

- $(M'_1, \leq'_1, \gamma'_1) = \text{init}(N_1)$ ,  $(M'_2, \leq'_2, \gamma'_2) = \text{init}(N_2)$  y  $\beta' = M_{0,1}^1 \times M_{0,2}^1$ , siendo  $M_{0,1} = (M_{0,1}^1, \emptyset)$ ,  $M_{0,2} = (M_{0,2}^1, \emptyset)$ .
- Existen  $(M_1, \leq_1, \gamma_1)$ ,  $(M_2, \leq_2, \gamma_2)$  y  $\beta$  tales que  $((M_1, \leq_1, \gamma_1), (M_2, \leq_2, \gamma_2), \beta)$  es alcanzable, y existe  $R_1$  tal que se cumplen las condiciones 2 y 3 de la definición 9.12, para obtener  $((M'_1, \leq'_1, \gamma'_1), (M'_2, \leq'_2, \gamma'_2), \beta')$ .

□

**Proposición 9.2** Sea  $\Sigma$  un alfabeto finito,  $N_1 = (S_1, T_1, F_1, \delta_1, M_{0,1}, l_1)$ ,  $N_2 = (S_2, T_2, F_2, \delta_2, M_{0,2}, l_2)$  SET 1-seguros sobre  $\Sigma$  y  $\mathcal{B}$  una TOM-bisimulación para ellos. Si  $((M_1, \leq_1, \gamma_1), (M_2, \leq_2, \gamma_2), \beta) \in \mathcal{B}$  es alcanzable, entonces  $\beta \subseteq M_1^1 \times M_2^1$ , siendo  $M_1 = (M_1^1, M_1^2)$ ,  $M_2 = (M_2^1, M_2^2)$  y para cualesquiera  $(s_1, s_2), (s'_1, s'_2) \in \beta$ , se tiene  $s_1 \leq_1 s'_1$  sii  $s_2 \leq_2 s'_2$ .

**Demostración:** El que  $\beta \subseteq M_1^1 \times M_2^1$  es claro por la definición de  $\beta'$ . La otra parte se razona por inducción, pues  $((M_1, \leq_1, \gamma_1), (M_2, \leq_2, \gamma_2), \beta)$  es alcanzable. En principio, el caso base es trivial. Para el caso general consideremos  $((M_1, \leq_1, \gamma_1), (M_2, \leq_2, \gamma_2), \beta) \in \mathcal{B}$  que sea alcanzable y cumpla la propiedad indicada, y sean  $R_1 \subseteq T_1$ ,  $R_2 \subseteq T_2$  que cumplen las condiciones 2 y 3 de la definición de TOM-bisimulación. Hemos de ver entonces que si  $(s_1, s_2), (s'_1, s'_2) \in \beta'$ , se tiene  $s_1 \leq'_1 s'_1$  sii  $s_2 \leq'_2 s'_2$ .

Sean entonces  $(s_1, s_2), (s'_1, s'_2) \in \beta'$  y probemos que  $s_1 \leq'_1 s'_1$  implica  $s_2 \leq'_2 s'_2$  (el recíproco es análogo).

Pueden darse los casos siguientes:

- $(s_1, s_2) \in \beta$ ,  $(s'_1, s'_2) \in \beta$ ,  $s_1, s'_1 \notin \bullet R_1$ ,  $s_2, s'_2 \notin \bullet R_2$ . En este caso, basta aplicar la hipótesis de inducción y la definición de  $\leq'_1$  y  $\leq'_2$ .
- $(s_1, s_2) \in \beta$ ,  $s_1 \notin \bullet R_1$ ,  $s_2 \notin \bullet R_2$ ,  $s'_1 \in t_1^\bullet$ ,  $t_1 \in R_1$ ,  $s'_2 \in t_2^\bullet$ , con  $t_2 = \psi(t_1)$ ,  $\delta_1(t_1) = 1$ .

Supongamos que  $s_1 \leq'_1 s'_1$ . En tal caso, por definición de  $\leq'_1$  existe  $s''_1 \in \bullet t_1$  tal que  $s_1 \leq_1 s''_1$ . Entonces, por definición de TOM-bisimulación existe un  $s'''_1$  consumido por  $t_1$  y un  $s'''_2$  consumido por  $t_2$ , tales que  $s''_1 \leq_1 s'''_1$ , con  $(s'''_1, s'''_2) \in \beta$ .

Por tanto,  $s_1 \leq_1 s''_1 \leq_1 s'''_1$ . Como tenemos  $(s_1, s_2) \in \beta$ ,  $(s'''_1, s'''_2) \in \beta$  y  $s_1 \leq_1 s'''_1$ , aplicamos la hipótesis de inducción y obtenemos  $s_2 \leq_2 s'''_2$ . Y como  $s'''_2$  es consumido por  $t_2$ , ello implica que  $s_2 \leq'_2 s'_2$ .

- $(s_1, s_2) \in \beta$ ,  $s_1 \notin \bullet R_1$ ,  $s_2 \notin \bullet R_2$ ,  $s'_1 \in t_1^\bullet$ ,  $s'_2 \in t_2^\bullet$ , con  $(t_1, 1) \in M_1^2$ ,  $(t_2, 1) \in M_2^2$ ,  $(t_2, 1) = \mu(t_1, 1)$ .

Supongamos que  $s_1 \leq'_1 s'_1$ . En tal caso, por definición de  $\leq'_1$ ,  $s_1 \in \gamma_1(t_1, 1)$ . Entonces, aplicando la definición de TOM-bisimulación  $s_2 \in \gamma_2(t_2, 1)$ . Por tanto, por definición de  $\leq'_2$ ,  $s_2 \leq'_2 s'_2$ .

- $s_1 \in t_1^\bullet$ ,  $s_2 \in t_2^\bullet$ ,  $t_2 = \psi(t_1)$ ,  $\delta_1(t_1) = 1$ .

Supongamos que  $s_1 \leq'_1 s'_1$ , entonces por definición de  $\leq'_1$  tenemos que  $s'_1 \in t_1^\bullet$ . Como  $(s'_1, s'_2) \in \beta'$  tenemos que  $s'_2 \in t_2^\bullet$ , y de ahí,  $s_2 \leq'_2 s'_2$ .

- $s_1 \in t_1^\bullet$ ,  $s_2 \in t_2^\bullet$ ,  $(t_1, 1) \in M_1^2$ ,  $(t_2, 1) \in M_2^2$ ,  $(t_2, 1) = \mu(t_1, 1)$ .

Se razona de forma análoga al caso anterior.

□

**Teorema 9.8** Sea  $\Sigma$  un alfabeto finito,  $N_1 = (S_1, T_1, F_1, \delta_1, M_{0,1}, l_1)$ ,  $N_2 = (S_2, T_2, F_2, \delta_2, M_{0,2}, l_2)$  SET 1-seguros sobre  $\Sigma$ . Entonces  $N_1$  y  $N_2$  son bisimilares preservando historias si y sólo si son TOM-bisimilares.

### Demostración:

$\Leftarrow$ : Sea  $\mathcal{B}$  la TOM-bisimulación. Vamos a definir por pasos la bisimulación preservando historias  $\mathcal{R}$ , a la vez que una función  $o : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{B})$ , que relaciona  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{B}$ .

1. En primer lugar hacemos  $(\pi_0(N_1), \pi_0(N_2), \emptyset) \in \mathcal{R}$ , y tomamos  $o(\pi_0(N_1), \pi_0(N_2), \emptyset) = \{(init(N_1), init(N_2), M_{0,1}^1 \times M_{0,2}^1)\}$ , siendo  $M_{0,1} = (M_{0,1}^1, \emptyset)$ ,  $M_{0,2} = (M_{0,2}^1, \emptyset)$ .

2. Sean ahora  $(\pi_1, \pi_2, f) \in \mathcal{R}$  y  $((M_1, \leq_1, \gamma_1), (M_2, \leq_2, \gamma_2), \beta) \in o(\pi_1, \pi_2, f)$ , con  $(M_1, \leq_1, \gamma_1)$ ,  $(M_2, \leq_2, \gamma_2)$ ,  $\beta$ ,  $\beta'$ ,  $R_1$  y  $R_2$  satisfaciendo las condiciones 2 y 3 de la definición de TOM-bisimulación. Podemos aplicar entonces, como veremos a continuación, el teorema 9.7, obteniéndose  $\pi'_1, \pi'_2$  tales que  $init(N_i)[\pi'_i](M'_i, \leq'_i, \gamma'_i)$ , para  $i = 1, 2$ , con  $\pi_1 \xrightarrow{R_1} \pi'_1$ ,  $\pi_2 \xrightarrow{R_2} \pi'_2$ . Definimos entonces  $f'$  mediante  $f'|_{ev(\pi_1)} = f$  y  $f'(e_1) = e_2$ , para cada  $e_1 \in E'_1 - E_1$ , donde  $e_2$  es el único evento asociado a  $\psi(p_1(e_1))$  en  $E_2$ ; y hacemos  $(\pi'_1, \pi'_2, f') \in \mathcal{R}$ ,  $((M'_1, \leq'_1, \gamma'_1), (M'_2, \leq'_2, \gamma'_2), \beta') \in o(\pi'_1, \pi'_2, f')$ .

Para aplicar dicho teorema se requieren dos hechos de fácil prueba:

- $\forall (\pi_1, \pi_2, f) \in \mathcal{R}$  se tiene  $o(\pi_1, \pi_2, f) \neq \emptyset$ . Con ello queda garantizada la existencia de  $((M_1, \leq_1, \gamma_1), (M_2, \leq_2, \gamma_2), \beta)$ .
- Si  $(\pi_1, \pi_2, f) \in \mathcal{R}$  entonces  $((M_1, \leq_1, \gamma_1), (M_2, \leq_2, \gamma_2), \beta) \in o(\pi_1, \pi_2, f) \Rightarrow init(N_i)[\pi_i](M_i, \leq_i, \gamma_i)$ , para  $i = 1, 2$ .

Otra consideración adicional que vamos a necesitar posteriormente es la siguiente:

- Sea  $(\pi_1, \pi_2, f) \in \mathcal{R}$ ,  $((M_1, \leq_1, \gamma_1), (M_2, \leq_2, \gamma_2), \beta) \in o(\pi_1, \pi_2, f)$  y sean  $b_1 \in \pi_1^\bullet \cap \Delta_1^{-1}(0)$ ,  $b_2 \in \pi_2^\bullet \cap \Delta_2^{-1}(0)$  tales que  $(s_1, s_2) \in \beta$ , siendo  $s_1 = p_1(b_1)$ ,  $s_2 = p_2(b_2)$ . Entonces  $\bullet b_1 \neq \emptyset \Rightarrow f(\bullet b_1) = \bullet b_2$  y  $\bullet b_2 \neq \emptyset \Rightarrow f^{-1}(\bullet b_2) = \bullet b_1$ .

Nos centraremos en la primera implicación, por ser la segunda totalmente análoga. La demostración de la misma se realiza por inducción sobre  $((M_1, \leq_1, \gamma_1), (M_2, \leq_2, \gamma_2), \beta)$ .

En el caso base tenemos que  $(M_1, \leq_1, \gamma_1) = init(N_1)$ ,  $(M_2, \leq_2, \gamma_2) = init(N_2)$ ,  $\beta = M_{0,1}^1 \times M_{0,2}^1$ . En tal caso  $(\pi_1, \pi_2, f) = (\pi_0(N_1), \pi_0(N_2), \emptyset)$ , de modo que la propiedad en cuestión se cumple de forma trivial.

En el caso general sea  $(\pi_1, \pi_2, f) \in \mathcal{R}$ ,  $((M_1, \leq_1, \gamma_1), (M_2, \leq_2, \gamma_2), \beta) \in o(\pi_1, \pi_2, f)$ , y  $(\pi'_1, \pi'_2, f') \in \mathcal{R}$  que cumpla las condiciones de la definición. Tenemos entonces que  $((M'_1, \leq'_1, \gamma'_1), (M'_2, \leq'_2, \gamma'_2), \beta') \in o(\pi'_1, \pi'_2, f')$ .

Consideremos entonces  $b_1 \in \pi_1^\bullet \cap \Delta_1^{-1}(0)$ ,  $b_2 \in \pi_2^\bullet \cap \Delta_2^{-1}(0)$ ,  $(s_1, s_2) \in \beta$ .

Hemos de distinguir los siguientes casos:

- (a)  $(s_1, s_2) \in \beta$ ,  $s_1 \notin \bullet R_1$ ,  $s_2 \notin \bullet R_2$ . Entonces  $s_1 \in M_1^1$ ,  $s_2 \in M_2^1$ , y por tanto  $b_1 \in \pi_1^\bullet \cap \Delta_1^{-1}(0)$ ,  $b_2 \in \pi_2^\bullet \cap \Delta_2^{-1}(0)$ . Basta entonces usar la hipótesis de inducción y aplicar  $f'|_{ev(\pi_1)} = f$ .
- (b)  $s_1 \in t_1^\bullet$ ,  $s_2 \in t_2^\bullet$ ,  $t_1 \in R_1$ ,  $t_2 = \psi(t_1)$ ,  $\delta(t_1) = 1$ . Sean entonces  $e_1 \in \bullet b_1$ ,  $e_2 \in \bullet b_2$ . Se tiene que  $f'(e_1) = e_2$ , lo que concluye en este caso la prueba.
- (c)  $s_1 \in t_1^\bullet$ ,  $s_2 \in t_2^\bullet$ ,  $(t_1, 1) \in M_1^2$ ,  $(t_2, 1) \in M_2^2$ ,  $(t_2, 1) = \mu(t_1, 1)$ . A partir de lo cual se razona como en el caso anterior.

El siguiente paso consiste en demostrar que  $f'$  es un isomorfismo entre  $ev(\pi'_1)$  y  $ev(\pi'_2)$ . Sabemos que  $f$  es un isomorfismo entre  $ev(\pi_1)$  y  $ev(\pi_2)$  y que  $f'$  extiende a  $f$ . Por tanto, sólo hemos de ver que si  $e'_1$  es un predecesor inmediato de  $e_1$ , con  $e_1 \in ev(\pi'_1)$ ,  $e_1 \notin ev(\pi_1)$ , entonces  $f(e'_1) \leq_{\pi'_2} f'(e_1)$ . La condición dual es una vez más análoga.

Consideremos para ello  $t_1 = p_1(e_1)$ ,  $b_1 \in \bullet e_1 \cap e'_1$  y sea  $s_1 = p_1(b_1)$ . Entonces  $s_1 \in \bullet t_1$ . Para él existen  $s'_1 \in \bullet t_1$ ,  $s'_2 \in \bullet t_2$ , siendo  $t_2 = \psi(t_1)$ , tales que  $s_1 \leq_1 s'_1$ ,  $(s'_1, s'_2) \in \beta$ .

Sean  $b'_1 \in p_1^{-1}(s'_1) \cap \pi_1^\bullet \cap \Delta_1^{-1}(0)$ ,  $b'_2 \in p_2^{-1}(s'_2) \cap \pi_2^\bullet \cap \Delta_2^{-1}(0)$ , que existen y son únicos por las propiedades que relacionan marcajes y procesos. De  $s_1 \leq_1 s'_1$  se sigue  $\bullet b_1 \leq_{\pi_1} \bullet b'_1$ , pues  $init(N_1)[\pi_1](M_1, \leq_1, \gamma_1)$ , y de ahí  $\bullet b'_1 \neq \emptyset$ . Por tanto, aplicando la tercera consideración obtenemos  $f(\bullet b'_1) = \bullet b'_2$ .

Además,  $b'_2 = e_2$ , y de ahí,  $f(e'_1) = f(\bullet b_1) \leq_{\pi'_2} f(\bullet b'_1) = \bullet b'_2 \leq_{\pi'_2} e_2$ .

Para concluir la prueba de esta primera implicación del teorema sólo nos queda por ver que  $\forall b_1 \in B'_1$ ,  $\bullet b_1 \neq \emptyset : \Delta'_1(b_1) = \Delta'_2(b_2)$ , siendo  $b_2 \in f'(\bullet b_1)^\bullet$ .

De nuevo usamos un razonamiento inductivo sobre la construcción de  $\mathcal{R}$ . El caso base se reduce de nuevo a considerar la terna  $(\pi_0(N_1), \pi_0(N_2), \emptyset)$ , para la cual la propiedad en cuestión es trivial (no existe ningún  $b_1$  cuya precondition sea no vacía).

En el caso general consideremos  $b_1 \in \pi'_1$ , y sea  $t_1 = p_1(e_1)$ , siendo  $e_1 \in \bullet b_1$ .

Hemos de distinguir entonces dos casos:

- $t_1 \notin R_1$ , de modo que  $b_1 \in \pi_1^\bullet$ , por lo que puede aplicarse la hipótesis de inducción, obteniéndose que  $\Delta_1(b_1) = \Delta_2(b_2)$ , para  $b_2 \in f(e_1)^\bullet$ , lo que se traslada a  $\Delta'_1$ ,  $\Delta'_2$  y  $f'$  de forma inmediata.

- $t_1 \in R_1$ , por lo que  $t_2 \in R_2$ , siendo  $t_2 = p_2(f(e_1))$ , y  $\Delta'_1(b_1) = \delta(t_1) - 1$ ,  $\Delta'_2(b_2) = \delta(t_2) - 1$ . Y como las duraciones de  $t_1$  y  $t_2$  coinciden, ambas expresiones lo hacen también.

$\Rightarrow$ : Sea  $\mathcal{R}$  la bisimulación preservando historias dada. Entonces definimos la TOM-bisimulación  $\mathcal{B}$  como sigue:

$((M_1, \leq_1, \gamma_1), (M_2, \leq_2, \gamma_2), \beta) \in \mathcal{B}$  sii  $\exists(\pi_1, \pi_2, f) \in \mathcal{R}$  tal que :

- (i)  $init(N_1)[\pi_1](M_1, \leq_1, \gamma_1), init(N_2)[\pi_2](M_2, \leq_2, \gamma_2)$ .
- (ii)  $\forall s_1 \in S_1, \forall s_2 \in S_2, (s_1, s_2) \in \beta$  sii  $s_1 \in M_1^1, s_2 \in M_2^1$ , siendo  $M_1 = (M_1^1, M_1^2), M_2 = (M_2^1, M_2^2)$  y existen  $b_1 \in \pi_1^* \cap \Delta_1^{-1}(0), b_2 \in \pi_2^* \cap \Delta_2^{-1}(0)$  tales que  $p_1(b_1) = s_1, p_2(b_2) = s_2$ , y  $(b_1 \in \pi_1^* \wedge b_2 \in \pi_2^*) \vee (\pi_1^* \cap \Delta_1^{-1}(0) = \emptyset \wedge \pi_2^* \cap \Delta_2^{-1}(0) = \emptyset \wedge f(\pi_1^* \cap \Delta_1^{-1}(0)) = \pi_2^* \cap \Delta_2^{-1}(0))$ .

Veamos que  $\mathcal{B}$  es efectivamente una TOM-bisimulación. En principio, sabemos que  $init(N_1)[\pi_0(N_1)]init(N_1)$  e  $init(N_2)[\pi_0(N_2)]init(N_2)$ . Entonces, como  $(\pi_0(N_1), \pi_0(N_2), \emptyset) \in \mathcal{R}$ , se tiene que  $(init(N_1), init(N_2), M_{0,1}^1 \times M_{0,2}^1) \in \mathcal{B}$ , pues la condición (ii) se cumple trivialmente.

En lo que se refiere a la segunda condición consideremos  $((M_1, \leq_1, \gamma_1), (M_2, \leq_2, \gamma_2), \beta) \in \mathcal{B}$ . Entonces existe  $(\pi_1, \pi_2, f) \in \mathcal{R}$  que cumple las dos condiciones de la definición de  $\mathcal{B}$ .

Tomamos la función  $\mu : M_1^2 \rightarrow M_2^2$  como sigue:  $\mu(t_1, n) = (p_2(f(e_1)), n)$ , siendo  $e_1 \in E_1$  el evento asociado en  $\pi_1$  a  $t_1$ . Dicha función  $\mu$  está bien definida, pues de la definición de bisimulación preservando historias se sigue que  $\forall b_1 \in e_1^* : n = \Delta_1(b_1) = \Delta_2(b_2)$ , siendo  $b_2 \in f(e_1)^*$ , y por tanto,  $(p_2(f(e_1)), n) \in M_2^2$ . Además,  $\mu$  es una biyección, pues  $f$  es un isomorfismo y sólo hay un evento  $e_1$  asociado a  $t_1$ .

Sean ahora  $(t_1, n) \in M_1^2, s_1 \in \gamma_1(t_1, n), s_2 \in M_2^1, (s_1, s_2) \in \beta$ . Consideremos  $(t_2, 1) = \mu(t_1, n)$ . Como  $(s_1, s_2) \in \beta$ , existen  $b_1 \in \pi_1^* \cap \Delta_1^{-1}(0)$  y  $b_2 \in \pi_2^* \cap \Delta_2^{-1}(0)$  tales que  $p_1(b_1) = s_1, p_2(b_2) = s_2$ , y  $(b_1 \in \pi_1^* \wedge b_2 \in \pi_2^*) \vee (\pi_1^* \cap \Delta_1^{-1}(0) = \emptyset \wedge \pi_2^* \cap \Delta_2^{-1}(0) = \emptyset \wedge f(\pi_1^* \cap \Delta_1^{-1}(0)) = \pi_2^* \cap \Delta_2^{-1}(0))$ .

Consideremos por separado ambos casos:



- (a) Si  $b_1 \in \bullet\pi_1$  y  $b_2 \in \bullet\pi_2$ , entonces  $s_2 \in \gamma_2(t_2, n)$  por la definición de  $init(N_2)[\pi_2]$   $(M_2, \leq_2, \gamma_2)$ , ya que  $b_2 \in p_2^{-1}(s_2) \cap \pi_2^\bullet \cap \Delta_2^{-1}(0)$ , y  $b_2 \in \bullet\pi_2$ .
- (b) Si  $\bullet b_1 \neq \emptyset$ ,  $\bullet b_2 \neq \emptyset$  y  $f(\bullet b_1) = \bullet b_2$ , entonces tenemos  $f(e_1) = e_2$ , siendo  $e_1 \in \bullet b_1$ ,  $e_2 \in \bullet b_2$ .

Como  $s_1 \in \gamma_1(t_1, n)$  tenemos que para  $\tilde{b}_1 \in p_1^{-1}(s_1) \cap \pi_1^\bullet \cap \Delta_1^{-1}(0)$  se verifica  $\tilde{b}_1 \in \bullet\pi_1 \vee (\tilde{b}_1 \notin \bullet\pi_1 \wedge \exists \tilde{e}_1 \in E_1(t_1, n)$  tal que  $\bullet\tilde{b}_1 \leq_{\pi_1} \tilde{e}_1)$ . En particular  $b_1$  cumple dicha condición, y por tanto, como estamos trabajando sobre redes 1-seguras,  $b_1 = \tilde{b}_1$ . Concluimos entonces que  $\bullet b_1 \neq \emptyset$ , y por tanto existe  $\tilde{e}_1$  en las condiciones indicadas. Sea entonces  $\tilde{e}_2 = f(\tilde{e}_1)$ . Como  $f$  es un isomorfismo tenemos  $e_2 \leq_{\pi_2} \tilde{e}_2$ . Por tanto,  $\bullet b_2 \leq_{\pi_2} \tilde{e}_2$ . Además, por la forma en que hemos definido  $\mu$  se tiene  $p_2(\tilde{e}_2) = t_2$ . Sea ahora  $\bar{b}_2 \in \tilde{e}_2^\bullet$ . Como  $f$  es un isomorfismo se tiene  $\bar{b}_2^\bullet = \emptyset$ , pues en caso contrario llegaríamos a una contradicción pues  $\tilde{b}_1$  no sería maximal en  $\pi_1$ . Por tanto,  $\bar{b}_2 \in \pi_2^\bullet$ . Además, como  $\mathcal{R}$  es una bisimulación preservando historias se tiene  $\Delta_1(\bar{b}_1) = \Delta_2(\bar{b}_2)$ , para  $\bar{b}_1 \in \tilde{e}_1^\bullet$ . Por tanto,  $\Delta_2(\bar{b}_2) = n$ . En consecuencia,  $\tilde{e}_2 \in E_2(t_2, n)$ , y además  $\bullet b_2 \leq_{\pi_2} \tilde{e}_2$ , lo que implica  $s_2 \in \gamma_2(t_2, n)$ .

La última implicación contenida en esta segunda condición no precisa prueba por ser la análoga de la anterior.

Veamos ahora la tercera condición. Supongamos al respecto que  $((M_1, \leq_1, \gamma_1), (M_2, \leq_2, \gamma_2), \beta) \in \mathcal{B}$  y que  $(M_1, \leq_1, \gamma_1)[R_1](M'_1, \leq'_1, \gamma'_1)$ . Consideremos entonces la terna  $(\pi_1, \pi_2, f) \in \mathcal{R}$ , que ha de existir en virtud de la definición dada de  $\mathcal{B}$ . Además se tiene:

$$init(N_i)[\pi_i](M_i, \leq_i, \gamma_i) \quad \text{para } i = 1, 2$$

Como  $R_1$  es disparable bajo  $M_1$ , podemos extender  $\pi_1$  por  $R_1$ , obteniendo  $\pi_1 \xrightarrow{R_1}_p \pi'_1$ . De ahí, como  $\mathcal{R}$  es una bisimulación preservando historias, existirá  $R_2$  tal que  $\pi_2 \xrightarrow{R_2}_p \pi'_2$ , con  $(\pi'_1, \pi'_2, f') \in \mathcal{R}$ , y  $f'|_{ev(\pi_1)} = f$ .

Como  $R_2$  nos permite extender  $\pi_2$ , también podemos extender  $(M_2, \leq_2, \gamma_2)$ , obteniendo  $(M'_2, \leq'_2, \gamma'_2)$  tal que  $(M_2, \leq_2, \gamma_2)[R_2](M'_2, \leq'_2, \gamma'_2)$ . Es posible entonces definir una biyección  $\psi : R_1 \rightarrow R_2$ , en la forma siguiente:

Siendo  $t_1 \in R_1$  consideremos el evento  $e_1 \in ev(\pi'_1)$  tal que  $e_1^\bullet \in \pi_1'^\bullet$ ,  $p'_1(e_1) = t_1$ , y tomamos  $f'(e_1) = e_2 \in ev(\pi'_2)$ . Definimos entonces  $\psi(t_1) = p'_2(e_2)$ .

De esta forma,  $l_1(t_1) = l_2(\psi(t_1))$ , pues  $f'$  conserva las acciones. Además,  $(M'_1, \leq'_1, \gamma'_1), (M'_2, \leq'_2, \gamma'_2), \beta') \in \mathcal{B}$ , donde  $\beta'$  está definido según se indica en la definición 9.12. Para demostrarlo hemos de ver que se cumplen las dos condiciones de la definición de  $\mathcal{B}$ . La primera de ellas se obtiene por aplicación inmediata del teorema 9.7.

Para demostrar la segunda condición consideremos  $s_1 \in S_1, s_2 \in S_2, (s_1, s_2) \in \beta'$ . Según la definición de  $\beta'$  pueden darse los casos siguientes:

- $s_1 \in M_1^1, s_2 \in M_2^1, s_1 \notin \bullet R_1, s_2 \notin \bullet R_2$  y  $(s_1, s_2) \in \beta$ .

En tal caso, como  $((M_1, \leq_1, \gamma_1), (M_2, \leq_2, \gamma_2), \beta) \in \mathcal{B}$ , tenemos que  $(s_1, s_2) \in \beta$  sii  $\exists b_1 \in p_1^{-1}(s_1) \cap \pi_1^* \cap \Delta_1^{-1}(0), b_2 \in p_2^{-1}(s_2) \cap \pi_2^* \cap \Delta_2^{-1}(0)$ , tales que  $(b_1 \in \bullet \pi_1 \wedge b_2 \in \bullet \pi_2) \vee (\bullet b_1 \neq \emptyset \wedge \bullet b_2 \neq \emptyset \wedge f(\bullet b_1) = \bullet b_2)$ , lo que puede trasladarse a  $\pi'_1, \pi'_2$  y  $f'$  sin dificultad.

- $s_1 \in t_1^*, t_1 \in R_1, \delta_1(t_1) = 1, s_2 \in \psi(t_1)^*$ .

En tal caso,  $s_1 \in M_1^1, s_2 \in M_2^1$ , y por la condición 1 de la definición 9.11 existen  $b_1 \in p_1^{-1}(s_1) \cap \pi_1^* \cap \Delta_1^{-1}(0), b_2 \in p_2^{-1}(s_2) \cap \pi_2^* \cap \Delta_2^{-1}(0)$ . Además,  $e_1 \in \bullet b_1$  es el evento asociado a  $t_1$  en  $\pi'_1$ , y  $e_2 \in \bullet b_2$  es el evento asociado a  $t_2$  en  $\pi'_2$ .

Como  $e_2 = f'(e_1)$ , entonces se cumple  $\bullet b_1 \neq \emptyset, \bullet b_2 \neq \emptyset, f'(\bullet b_1) = \bullet b_2$ , como queríamos demostrar.

- $s_1 \in t_1^*, (t_1, 1) \in M_1^2, s_2 \in t_2^*, (t_2, 1) \in M_2^2, (t_2, 1) = \mu(t_1, 1)$ .

De nuevo se tiene  $s_1 \in M_1^1, s_2 \in M_2^1$ , por lo que existen  $b_1 \in p_1^{-1}(s_1) \cap \pi_1^* \cap \Delta_1^{-1}(0), b_2 \in p_2^{-1}(s_2) \cap \pi_2^* \cap \Delta_2^{-1}(0)$ .

Según la definición de  $\mu$  tenemos que  $(t_2, 1) = \mu(t_1, 1) = (p_2(f(e_1)), 1)$ , siendo  $e_1$  el evento asociado a  $t_1$  en  $\pi_1$ . Entonces  $t_2 = p(f(e_1))$ , y de ahí,  $e_2 = f(e_1)$  es el evento asociado a  $t_2$  en  $\pi_2$ . Entonces  $e_1 \in \bullet b_1$  y  $e_2 \in \bullet b_2$ , y por tanto  $\bullet b_1 \neq \emptyset, \bullet b_2 \neq \emptyset, f'(\bullet b_1) = \bullet b_2$ , como queríamos demostrar.

El siguiente paso consiste en demostrar que la definición de  $\mu'$  cumple la restricción indicada en el primer apartado de la condición 3 de la definición de TOM-bisimulación. Para ello consideramos  $(t_1, n) \in M_1^2$  y distinguimos los dos casos que se diferencian en dicha definición:

- Si  $t_1 \in R_1$ , entonces  $n = \delta_1(t_1) - 1$ , y  $\mu'(t_1, \delta_1(t_1) - 1)$  está definido por

$$\mu'(t_1, \delta_1(t_1) - 1) = (p'_2(f'(e_1)), \delta_1(t_1) - 1)$$

siendo  $e_1$  el evento asociado a  $t_1$ .

Ahora bien,  $p'_2(f'(e_1)) = \psi(t_1)$ , y por tanto

$$\mu'(t_1, \delta_1(t_1) - 1) = (\psi(t_1), \delta_1(t_1) - 1)$$

como queríamos demostrar.

- Si  $t_1 \notin R_1$ , aplicamos la definición de  $\mu'$  y obtenemos

$$\mu'(t_1, n) = (p'_2(f'(e_1)), n)$$

siendo  $e_1$  el evento asociado a  $t_1$ . Dicho evento estará en  $E_1$  (conjunto de eventos de  $\pi_1$ ), pues  $t_1 \notin R_1$ , y por tanto,  $f'(e_1) = f(e_1)$  y  $p'_2(f(e_1)) = p_2(f(e_1))$ . En consecuencia

$$\mu'(t_1, n) = (p_2(f(e_1)), n)$$

Veamos ahora que  $\mu(t_1, n + 1)$  está definido y vale  $(p_2(f(e_1)), n + 1)$ , lo que terminará esta parte de la demostración.

Para ello, basta tener en cuenta que  $(t_1, n) \in M_1'^2$ . Entonces, por la definición de evolución de marcajes,  $(t_1, n + 1) \in M_1^2$ . En consecuencia,  $\mu(t_1, n + 1)$  está definido y según la definición de  $\mu$  vale  $\mu(t_1, n + 1) = (p_2(f(e_1)), n + 1)$ .

Centrémonos ahora en el segundo apartado de la condición 3. Sean entonces  $t_1 \in R_1$ ,  $s_1 \in \bullet t_1$ , y  $e_1$  el evento asociado a  $t_1$ . Hemos de distinguir dos casos:

- Si  $\exists \tilde{e}_1 \in ev(\pi_1)$  tal que  $\tilde{e}_1 \leq_{\pi_1'} e_1$ , entonces  $\bullet b_1 = \emptyset$ , siendo  $b_1 \in p_1^{-1}(s_1) \cap \pi_1^\bullet \cap \Delta_1^{-1}(0)$ . De ahí, como  $f'$  es un isomorfismo  $\exists \tilde{e}_2 \in ev(\pi_2)$  tal que  $\tilde{e}_2 \leq_{\pi_2'} e_2$ , donde  $e_2$  es el evento asociado a  $t_2 = \psi(t_1)$ . Así pues,  $\exists b_2 \in \bullet e_2$  tal que  $\bullet b_2 = \emptyset$ . Entonces  $s_2 = p_2(b_2) \in \bullet t_2$ , y como  $b_1 \in \bullet \pi_1, b_2 \in \bullet \pi_2$ , concluimos  $(s_1, s_2) \in \beta$ .
- En caso contrario, tenemos  $\tilde{e}_1 \in ev(\pi_1)$ ,  $\tilde{e}_1 \leq_{\pi_1'} e_1$ . Consideremos  $b_1 \in p_1^{-1}(s_1) \cap \pi_1^\bullet \cap \Delta_1^{-1}(0)$ . De nuevo hemos de distinguir dos subcasos:

- (b.1)  $\bullet b_1 = \emptyset$ . Del hecho de que  $\tilde{e}_1 \leq_{\pi_1'} e_1$ , como  $f'$  es un isomorfismo entre estructuras de eventos se sigue que  $\exists \tilde{e}_2 \in ev(\pi_2)$  tal que  $f(\tilde{e}_1) = \tilde{e}_2$ ,  $\tilde{e}_2 \leq_{\pi_2'} e_2$ . Sean entonces  $\tilde{b}_1 \in \tilde{e}_1^* \cap \bullet e_1$ , y  $\tilde{b}_2 \in \tilde{e}_2^* \cap \bullet e_2$ , que cumplirán  $\Delta_1(\tilde{b}_1) = 0$ ,  $\Delta_2(\tilde{b}_2) = 0$ , y sean  $\tilde{s}_1 = p_1(\tilde{b}_1)$ ,  $\tilde{s}_2 = p_2(\tilde{b}_2)$ . Tenemos entonces  $f(\bullet \tilde{b}_1) = f(\tilde{e}_1) = \tilde{e}_2$ , cumpliéndose  $\bullet \tilde{b}_1 \neq \emptyset$ ,  $\bullet \tilde{b}_2 \neq \emptyset$ ,  $f(\bullet \tilde{b}_1) = \bullet \tilde{b}_2$ . En consecuencia,  $(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2) \in \beta$ . Además, como  $b_1 \in \bullet \pi_1 \cap \pi_1^*$ ,  $\tilde{b}_1 \in \pi_1^*$ , concluimos  $s_1 \leq_1 \tilde{s}_1$ , en virtud de la condición 3 de la definición 9.11.
- (b.2)  $\bullet b_1 \neq \emptyset$ . Sea entonces  $\tilde{e}_1 \in \bullet b_1$ . Como  $\tilde{e}_1 \leq_{\pi_1'} e_1$ , existe  $\tilde{e}_2 \in ev(\pi_2)$  tal que  $\tilde{e}_2 \leq_{\pi_2'} e_2$  y  $f(\tilde{e}_1) = \tilde{e}_2$ . Sea entonces  $\tilde{b}_2 \in \bullet e_2 \cap \tilde{e}_2^*$ , y  $\tilde{s}_2 = p_2(\tilde{b}_2)$ . Tenemos  $\bullet b_1 \neq \emptyset$ ,  $\bullet \tilde{b}_2 \neq \emptyset$ ,  $f(\bullet b_1) = \bullet \tilde{b}_2$ , por lo que  $(s_1, \tilde{s}_2) \in \beta$ .

Con ello concluye la prueba de la condición tercera de la definición de TOM-bisimulación, por ser la implicación restante análoga a la anterior, y con ello finaliza la prueba del teorema.  $\square$

**Corolario 9.1** Sea  $\Sigma$  un alfabeto finito,  $N_1 = (S_1, T_1, F_1, \delta_1, M_{0,1}, l_1)$ ,  $N_2 = (S_2, T_2, F_2, \delta_2, M_{0,2}, l_2)$  SET 1-seguros sobre  $\Sigma$ . Entonces es decidible si  $N_1$  y  $N_2$  son bisimilares preservando historias.

**Demostración:** Basta aplicar el teorema anterior y tener en cuenta que el número de posibles marcajes ordenados para un SET 1-seguro es finito.  $\square$



# Capítulo 10

## Trabajos Relacionados

Aunque no es mucha la bibliografía existente sobre modelos temporizados de redes de Petri (al nivel teórico, en el que nosotros hemos centrado nuestro interés), y en particular donde se estudie la decidibilidad de propiedades sobre dichos modelos, presentamos en este capítulo un resumen de aquellos trabajos que hemos considerado de mayor interés.

### 10.1 Redes TER

Las Redes TER son una clase particular de Redes ER, las cuales son un modelo introducido en [GMMP91], que puede ser utilizado para especificar el control, la funcionalidad y los aspectos de temporización de sistemas concurrentes. En este sentido, los dos modelos clásicos de Redes de Petri con Tiempos que fueron comentados en el capítulo 3 pueden representarse por medio de redes ER. La mejora, en este caso, consiste en que las redes ER permiten además representar aspectos funcionales, que no pueden ser representados en dichos modelos clásicos.

Las redes ER son redes de alto nivel en las que los tokens son *entornos*, es decir, funciones que asocian valores a variables, y cada transición lleva asociada una *acción*, que especifica qué tokens de entrada pueden ser utilizados en su disparo y qué tokens de salida se producen como consecuencia del mismo. Por tanto, los marcajes son asignaciones de multiconjuntos de entornos a lugares.

La presencia de entornos dentro del modelo proporciona la vía para la especificación de aspectos funcionales y temporales. Por ejemplo, los aspectos temporales

pueden ser especificados incluyendo una variable *reloj* cuyo valor representa el instante en que un token ha sido producido. A las redes ER dotadas de dicha variable se las llama redes TER, y si de hecho ésta es la única variable en todo entorno, entonces se les llama redes TB (que por tanto no permiten especificar aspectos funcionales). Por supuesto, las acciones asociadas con las transiciones son las responsables de producir los valores de dicha variable para los tokens producidos con sus disparos (evidentemente, se imponen varios axiomas que garantizan que el uso de dicha variable es el razonable).

Junto a la semántica natural de las redes TER, que considera que una transición permitida no está obligada a dispararse, también se introduce un modelo semántico *fuerte*, que considera un cierto tipo de *time-outs*. En dicho modelo semántico fuerte las transiciones tienen asociado un máximo tiempo de espera, de modo que queda garantizado que si en un cierto momento una de ellas es activable, y de momento no decidimos dispararla (lo que sería obligatorio si todavía fuese ejecutable al concluir su tiempo de espera), ninguna otra transición que comparta con ella lugares precondition (en conflicto con ella) con un tiempo de espera mayor podrá ser disparada (con lo que se evita que transiciones “menos urgentes” puedan impedir con su ejecución la de otras “más urgentes”). No obstante, esta semántica fuerte puede ser fácilmente codificada mediante la semántica ordinaria de este tipo de redes.

En lo que al análisis de propiedades hace referencia, en dicho artículo se demuestra que las propiedades de alcance, vivacidad, limitación y seguridad son indecidibles en redes ER, incluso con la semántica ordinaria (es relativamente sencillo probar que toda máquina de Turing puede ser codificada con este modelo). La causa directa de la indecidibilidad de estas propiedades es la presencia de los entornos, ya que si los ignoramos obtenemos Redes de Petri ordinarias, para las cuales ya sabemos que estos problemas son decidibles.

## 10.2 LOTOS Temporizado y Redes con Tiempos

En [BLT89] se describen dos de los modelos temporizados de Redes de Petri introducidos en la sección 1.2, las Redes de Petri con Tiempo [MeFa76, Mer74], y

las Redes de Petri con Arcos Temporizados [Wal83]. Las diferencias entre ambos modelos temporizados de redes de Petri las encontramos en aquellos sistemas en los que tenemos transiciones con dos o más lugares precondición. En el primer modelo el disparo de una transición está únicamente sujeto a las restricciones temporales impuestas por el intervalo de tiempo asociado a la transición. En el segundo, el disparo de una transición sólo puede producirse dentro de la intersección de los diferentes intervalos de tiempo involucrados (uno por cada arco que la una con sus lugares precondición). Además, en el primer modelo se fuerza el disparo de las transiciones cuando se alcanza el tiempo máximo de disparo, mientras que en el segundo modelo el disparo de las transiciones permitidas es sólo una posibilidad.

En [BoCr89] se demuestra que las Redes con Arcos Temporizados son un modelo débil, en el sentido de que no pueden codificar una máquina de Turing, por lo que dicho modelo no extiende significativamente la potencia descriptiva de las Redes de Petri No Temporizadas. Por el contrario, es bien conocido [JoLi77] que las Redes de Petri con Tiempos tienen la misma potencia descriptiva que las máquinas de Turing (en la correspondiente demostración es esencial el hecho de que las transiciones deben dispararse, siempre que sigan siendo activables, cuando se alcanza el tiempo máximo de disparo permisible).

Inspirándose en estos modelos, en [BLT89] se describen asimismo dos modelos de LOTOS temporizado, el LOTOS con Acciones Temporizadas y el LOTOS con Interacción Temporizada.

EL LOTOS con Acciones Temporizadas es una extensión temporizada del lenguaje LOTOS, donde la temporización es análoga a la de las Redes con Arcos Temporizados. La idea consiste en incluir un operador **prefijo temporizado** en el que se especifica un intervalo de tiempo dentro del cual puede ocurrir la acción involucrada (pero no está obligada a ocurrir), y un operador **old** que permite especificar el paso del tiempo.

El LOTOS con Interacción Temporizada está basado en el modelo de Redes de Petri con Tiempo, incluyendo operadores para el modelado de la *urgencia* y de los intervalos de tiempo dentro de los cuales ciertas acciones deben ocurrir. En concreto, se incluye un operador **asap** para especificar la ejecución urgente de una acción, (ésta debe ocurrir tan pronto como sea posible), un operador **old** con el mismo significado que en el modelo de Acciones Temporizadas y un operador



timer que especifica el intervalo de tiempo en el que una acción debe ocurrir.

### 10.3 Codificación de RPT de Andre

Un esquema de codificación de Redes de Petri Temporizadas mediante Redes de bajo nivel puede encontrarse en [And86], si bien dicha construcción presenta a nuestro juicio algunos problemas.

El tratamiento formal de las redes temporizadas es diferente en la forma, pero equivalente en el fondo, al que hemos introducido en el capítulo 3. En concreto, cada token puede estar *disponible* (utilizable) o *reservado* (en período de consumición, y por lo tanto no utilizable). Por tanto, un marcaje  $M$  consta de dos componentes, una que recoge los tokens reservados ( $M.R$ ), y otra que recoge los tokens disponibles ( $M.A$ ). Entonces, una transición está permitida si y sólo si en todas sus precondiciones disponemos de un número suficiente de tokens disponibles. Una transición permitida puede dispararse, pero al producirse su disparo no se sustraen, de momento, tokens de las precondiciones, sino que se anotan como reservados los tokens (disponibles) utilizados para su disparo. Cuando finaliza la ejecución de la transición (transcurrido el tiempo  $\delta(t)$ ) se eliminan definitivamente dichos tokens (previamente reservados) y se añaden los correspondientes tokens a los lugares postcondición.

La codificación que se esboza se basa en considerar por cada transición  $t$  dos nuevas transiciones,  $b.t$  y  $e.t$ , que representan el comienzo y el final de su ejecución, construyéndose una red de bajo nivel que respeta (si bien esto no se consigue exactamente) la restricción temporal impuesta por la duración de la transición, es decir, que  $e.t$  se ejecute exactamente  $\delta(t)$  unidades de tiempo después que  $b.t$ .

En la codificación presentada es esencial la presencia de un reloj global que modele el paso del tiempo, para lo cual se incluye una transición que se supone que se dispara con una cierta periodicidad (cada “instante de tiempo”). La codificación incluye en principio arcos inhibidores, si bien los mismos pueden ser eliminados si no se permiten ejecuciones solapadas de una misma transición.

Un problema que surge al realizar dicha codificación es como tratar la ejecución simultánea de varias transiciones. Dado que la construcción está planteada de forma que la ejecución de cada transición corresponde al paso de una unidad de

tiempo, la única posibilidad de modelar la coincidencia de eventos en tiempo es mediante una única transición que agrupe la ocurrencia de dichos eventos. En caso contrario, es preciso disponer en el modelo de lugares con capacidad nula, lo que claramente supone alterar la semántica ordinaria de las Redes de Petri.

Además, como ya señalamos antes, dicha codificación no garantiza que la ocurrencia de  $e.t$  tenga lugar exactamente  $\delta(t)$  unidades de tiempo después que  $b.t$  (se garantiza únicamente que al menos hay un retraso de  $\delta(t)$  unidades de tiempo, pero posiblemente  $e.t$  ocurra  $\delta(t) + 1$  unidades de tiempo después que  $b.t$ ).

## 10.4 Redes SENS

Las redes SENS (Synchronized Elementary Net Systems) son un modelo introducido en [And88], que generalizan el concepto de ENS (Elementary Net Systems), introduciendo junto a los eventos y condiciones, una serie de restricciones temporales que limitan en el tiempo la posibilidad de ejecución de los primeros, y una relación de prioridades entre los eventos, que se utiliza para resolver de una forma determinista los conflictos.

En concreto, cada evento tiene asociados dos valores naturales,  $a$  y  $b$ , siendo  $a$  el tiempo mínimo que deben permanecer marcados todos los lugares precondition de dicho evento antes de que éste pueda ser disparable, y  $b$  es el tiempo máximo que tiene dicho evento para dispararse desde el momento en que está permitido. Por tanto, un evento  $e$  con valores naturales asociados  $a$  y  $b$  puede ocurrir en un instante determinado si las preconditiones del mismo han permanecido marcadas durante un tiempo  $a$ , y no existe otro evento con mayor prioridad y en conflicto con él, que pueda ocurrir en ese instante. Una vez transcurrido el tiempo  $b$  desde que  $e$  fue activado, éste debe ser necesariamente disparado (si todavía sigue permitido).

En sistemas en los que no hay conflictos, la relación de prioridades puede omitirse por innecesaria.

En [And91] puede encontrarse un algoritmo aplicable sobre redes SENS sin prioridades, que permite calcular los períodos mínimos de tiempo que han de ocurrir entre la ocurrencia de cada par posible de eventos, aplicándose dicho algoritmo al problema de alcance sobre dicho tipo de redes.



# Bibliografía

- [AlDi90] Rajeev Alur, David Dill. *Automata For Modelling Real-Time Systems*. ICALP 90, Lecture Notes in Computer Science, 443. 1990.
- [And86] Charles Andre. *A Semantics of Timed Petri Nets in Terms of Low Level Petri Nets*. Proc. Seventh European Workshop on Application and Theory of Petri Nets, 1986.
- [And88] Charles Andre. *Synchronized Elementary Net Systems*. 9th European Workshop on Petri-Nets. VENICE(I), Junio 1988.
- [And91] Charles Andre. *Delays in Synchronized Elementary Net Systems*. Advances in Petri Nets, Lecture Notes in Computer Science, 524. 1991.
- [AMBB+89] M. Ajmone Marsan, G. Balbo, A. Bobbio, G. Chiola, G. Conte, A. Cumani. *The effect of execution policies on the semantics and analysis of stochastic Petri nets*. IEEE Transactions on Software Engineering, 15(7):832-846. 1989.
- [AMBC84] M. Ajmone Marsan, G. Balbo, A. Bobbio, G. Conte. *A class of generalized stochastic Petri nets for the performance evaluation of multiprocessor systems*. ACM Transactions on Computer Systems, 2(2):93-122. 1984.
- [AMBC86] M. Ajmone Marsan, G. Balbo, A. Bobbio, G. Conte. *Performance Models of Multiprocessor Systems*. MIT Press, Cambridge. 1986.
- [BaBe89] J.C.M. Baeten, J.A. Bergstra. *Real-Time Process Algebra*. Technical Report, Dep. of Software Technology, Universiteit van Amsterdam. 1989.
- [Ber80] G. Berthelot, G. Roucairol, R. Valk. *Reduction of Nets and Parallel Programs*. Lecture Notes in Computer Science, 84. 1980.

- [Bes85] Eike Best. *Concurrent Behaviour: Sequences, Processes and Axioms*. Workshop on Concurrency. Lecture Notes in Computer Science, 197. 1985.
- [Bes86] Eike Best. *Sequential And Concurrent Behaviour in Petri Net Theory*. Theoretical Computer Science 55 (1987).
- [BeFe86] Eike Best, Cesar Fernandez. *Notations and Terminology of Petri Net Theory*. Arbeitspapiere der GMD 195, Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, 1986.
- [BoCr89] T. Bolognesi, P. Cremonese. *The Weakness of Some Timed Models for Concurrent Systems*. Technical Report CNUCE C89-29, CNUCE-C.N.R., Pisa. Oct.1989.
- [BeKl84a] J.A. Bergstra, J.W. Klop. *Algebra of Communicating Processes*. Technical Report CS-R8420, Centre for Mathematics and Computer Science. Department of Computer Science, 1984.
- [BeKl84b] J.A. Bergstra, J.W. Klop. *Process Algebra for Synchronous Communication*. Information and Control, 60(1-3). 1984.
- [BoLu91] Tommaso Bolognesi, Ferdinando Lucidi *Timed process algebras with urgent interactions and a unique powerful binary operator*. Proc. REX Workshop "Real Time: Theory and Practice", Le Plasmolen. 1991.
- [Bra86] G. W. Braams. *Las Redes de Petri. Teoría y Práctica*. Tomos 1 y 2. Ed. Masson, 1986.
- [BDKP91] E. Best, R. Devillers, A. Kiehn, L. Pomello. *Concurrent Bisimulations in Petri Nets*. Acta Informatica, 28, 231-264 (1991).
- [BF86] Eike Best, Cesar Fernandez. *Notations and Terminology Of Petri Net Theory*. Arbeitspapiere der GMD 195, Gesellschaft für Mathematic und Datenverarbeitung, 1986.
- [BLT89] T. Bolognesi, F. Lucidi, S. Trigila. *From Timed Petri Nets to Timed LOTOS*. Int. report, Istituto CNUCE, PISA. 1989.

- [Cam90] *Performance Bounds for Synchronized Queueing Networks*. Tesis Doctoral, Dpto. Ing. electrónica e Informática (Univ. Zaragoza). Octubre, 1990.
- [DaSc90] Jim Davis, Steve Schneider. *An Extended Syntax for Timed CSP*. Technical Report, Oxford University Computing Laboratory.
- [Dia86] M. Diaz. *Nets in protocols*. Adv. Course on Petri Nets, Bad Honnef 8, 1986.
- [Dro90] Manfred Droste. *Concurrency, Automata and Domains*. ICALP 90. Lecture Notes in Computer Science, 443. 1990.
- [Esp90] Javier Esparza. *Teoría Estructural de las redes de Petri de libre elección*. Tesis Doctoral, Dpto. Ing. Eléctrica e Informática. Univ. Zaragoza. 1990.
- [Fer86] C. Fernández. *Non-Sequential Processes*. Advanced Course on Petri Nets. Bad Honnef, 1986.
- [FlNa85] G. Florin, S. Natkin. *Evaluation based upon stochastic Petri nets of the maximum throughput of a full duplex protocol*. Applications and Theory of Petri Nets (Informatic-Fachberichte, vol. 52(280-288). 1985.
- [Fru86] D. Frutos Escrig. *Decidability of Home States and Other Related Properties of a Place Transition System*. Int. Report, Dpto. Informática y Automática, 1986.
- [Gro90] Jan Friso Groote. *Specification and Verification of Real Time Systems in ACP*. Proc. Protocol Specification, Testing and Verification X. The Netherlands, Elsevier-Science. 1990.
- [GMMP91] G. Ghezzi, D. Mandrioli, S. Morasca, M. Pezze. *A Unified High-Level Petri Net Formalism for Time-Critical Systems*. IEEE Transactions of Software Engineering, Vol.17,no.2. 1991.
- [Hoa78] C.A.R. Hoare. *Communicating Sequential Processes*. Communications of the ACM, 21(8):666-677. 1978.

- [Hoa85] C.A.R. Hoare. *Communicating Sequential Processes*. Prentice-Hall International, 1985.
- [HV85] M. A. Holliday, M. K. Vernon. *A generalized timed Petri net model for performance analysis*. Proc. of the International Workshop on Timed Petri Nets, pag. 181-190, Torino, Italia, Julio 1985. IEEE-CS Press.
- [Jan86] Matthias Jantzen. *Language Theory of Petri Nets*. Advanced Course on Petri Nets, Bad Honnef, 1986.
- [Jen91] K. Jensen, G. Rozenberg. *High-Level Petri Nets, Theory and Application*. Springer-Verlag, 1991.
- [JoFr91] C. Johnen, D. Frutos Escrig. *Decidability of the Home Space Property*. Submitted to Mathematical Structures in Computer Science, 1991.
- [JoLi77] Neil D. Jones, Lawrence H. Landweber. *Complexity of some problems in Petri Nets*. Theoretical Computer Science, vol. 3, pg. 277-299. 1977.
- [Kos82] S.R. Kosaraju. *Decidability of reachability in vector addition systems*. Proc. 14th ACM Symp. on Theory of Computing. 1982.
- [KSGK88] R. Koymans, R.K. Shyamasundar, R. Gerth, S. Arun-Kumar. *Compositional Semantics For Real-Time Distributed Computing*. Inf. Comp. 79, 210-256. 1988.
- [Lam86] J.L. Lambert. *Consequences of the Decidability of the Reachability Problem for Petri Nets*. Unité Associée au CNRS 410:AL KHOWARIZMI. 1986.
- [Lam92] J.L. Lambert. *A structure to decide reachability in Petri Nets*. Theoretical Computer Science, vol. 99, 79-104. 1992.
- [Lau86] Kurt lautenbach. *Linear Algebraic Techniques for Place/Transition Nets*. Advanced Course on Petri Nets. Bad Honnef, 1986.
- [Lin91] H. Linde. *Free Choice Simulation of Petri Nets*. Proc. of Petri Nets and Performance Models 1991, Melbourne (Australia).

- [Lip76] R. Lipton. *The Reachability Problem Requires Exponential Space*. Research Report 62, Dep. of Computer Science, Yale University, New Haven. 1976.
- [MBC84] M.A. Marsan, G. Balbo, G. Conte. *A class of generalised stochastic Petri nets for the performance evaluation of multiprocessor systems*. ACM Trans. Computer Systems, vol. 2(93-122). 1984.
- [May81] E. W. Mayr. *An Algorithm for the General Petri Reachability Problem*. Proc. 13th ACM Symp. on Theory of Computing. 1981.
- [MeVa86] G. Memmi, J. Vautherin. *Advanced Algebraic Techniques*. 1986.
- [Mer74] P. Merlin. *A Study of the Recoverability of Communication Protocols*. Thesis Doc. Computer Science Dep. Univ. California, 1974.
- [MeFa76] P. Merlin, D.J. Farber. *Recoverability of Communication Protocols - Implications of a Theoretical Study*. IEEE Trans. Commun. Vol. COM-24. 1976.
- [Mil80] Robin Milner. *A Calculus of Communicating Systems*. Lecture Notes in Computer Science 92, Springer-Verlag. 1980.
- [Mil89] Robin Milner. *Communication and Concurrency*. Prentice-Hall International, 1989.
- [MoTo90] F. Moller, C. Tofts. *A Temporal Calculus of Communicating Systems*. Proc. CONCUR 90, Lecture Notes in Computer Science, 458. Amsterdam, pp. 401-415. 1990.
- [NRSV90] X. Nicollin, J.L. Richier, J. Sifakis, J. Voiron. *ATP: An Algebra for Timed Processes*. Proc. IFIP Conf. Prog. Concepts and Methods. See of Galilea. 1990.
- [Ort90] Yolanda Ortega. *En busca del Tiempo Perdido*. Tesis Doctoral, Dpto. Informática y Automática (UCM), 1990.
- [Pet62] C.A. Petri. *Kommunikation mit Automaten*. Institut für Instrumentelle Mathematic, Bonn, Schriften des IMM Nr.2, 1962.



- [Pet81] J.L. Peterson. *Petri Net Theory and the Modeling of Systems*. Prentice-Hall, 1981.
- [QAF89] J. Quemada, A. Azcorra, D. Frutos. *A Timed Calculus for LOTOS*. Proc. FORTE 89. Vancouver (Canada). 1989.
- [QuFe87] J. Quemada, A. Fernández. *Introduction of Quantitative Relative Time into LOTOS*. Proc. IFIP WG 6.1 7th International Conference on Protocol Specification, Testing and Verification, C.H. West Editors, North-Holland. 1987.
- [Ram74] C. Ramchandani. *Analysis of Asynchronous Concurrent Systems by Timed Petri Nets*. Project MAC, TR 120, MIT. 1974.
- [Rei86] W. Reisig. *Place/Transition Systems*. Advanced Course on Petri Nets. Bad Honnef, 1986.
- [Reu90] Christophe Reutenauer. *The Mathematics of Petri Nets*. Masson, 1990.
- [ReRo87] G. M. Reed, A. W. Roscoe. *Metric Spaces as Models for Real-Time Concurrency*. Mathematical Foundations of Programming Language Semantics Springer-Verlag, 1987.
- [ReRo88] G. M. Reed, A. W. Roscoe. *A Timed Model For Communicating Sequential Processes*. Theoretical Computer Science 58, (1988), 249-261. 1988.
- [Roz86] G. Rozenberg. *Behaviour of Elementary Net Systems*. Advanced Course on Petri Nets. Bad Honnef, 1986.
- [RP84] R. R. Razouk, C. V. Phelps. *Performance analysis using timed Petri nets*. Proc. of the International Conference on Parallel Processing pag. 126-129. 1984.
- [RT88] A. Rabinovich, B. A. Trakhtenbrot. *Behaviour structures and nets*. Fundamenta Informaticae, 11:357-404. 1988.
- [Sif78] J. Sifakis. *Structural Properties of Petri Nets*. Mathematical Foundations of Computer Science, Springer-Verlag, pp. 474-483. 1978.

- [Sil85] Manuel Silva. *Las Redes de Petri en la Automática y en la Informática*. Ed AC, 1985.
- [VFC91] V. Valero, D. de Frutos, F. Cuartero, *Simulation of Timed Petri Nets by Ordinary Petri Nets and Applications to Decidability of the Timed Reachability Problem and other related problems*. Proc. Fourth Intern. Workshop of Petri Nets and Performance Models (Melbourne, 1991).
- [Vog89] W. Vogler. *Failures Semantics and Deadlocking of Modular Petri Nets*. Acta informatica 26, 333-348. Springer Verlag. 1989.
- [Vog91] W. Vogler. *Deciding History Preserving Bisimilarity*. Lect. Notes in Computer Science, 510, Proc. ICALP 1991.
- [Vog92] W. Vogler. *Modular Construction and Partial Order Semantics of Petri Nets*. Lecture Notes in Computer Science, no. 625. Springer-Verlag. 1992.
- [Wal83] B. Walter. *Timed Petri-Nets for Modelling and Analyzing Protocols with Real-Time Characteristics*. Proc. 3rd IFIP Workshop on Protocol Specification, Testing and Verification, North-Holland. 1983.
- [Win86] G. Winskel. *Event Structures*. Advanced Course on Petri Nets. Bad Honnef, 1986.
- [Yi90] Wang Yi. *Real-Time Behaviour of Asynchronous Agents*. Lecture Notes in Computer Science, 458. 1990.
- [Zub85] W. M. Zuberek. *Performance evaluation using timed Petri nets*. Proc. of the International Workshop on Timed Petri Nets, pag. 272-278. Torino, Italia, Julio 1985. IEEE-CS Press.